# A. 速度分布関数とマクロ物理量 (単原子分子の場合)

**目次**



## A.1 速度分布関数の定義

ボルツマン方程式の未知関数である速度分布関数 $f$ は分子速度 $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, 時間 $t$ の関数として次のように定義される。すなわち、時刻 $t$ において、その位置が物理空間の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を含む微小体積要素 $d\boldsymbol{r} = dxdydz$(例えば図 1.1 に示す直方体) 内にあり、その速度が速度空間の点 $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$ を含む微小体積要素 $d\boldsymbol{c} = (dc_x, dc_y, dc_z)$(例えば図 1.2 に示す直方体) 内にあるような気体分子の個数が

$$f(c_x, c_y, c_z, x, y, z, t)dc_xdc_ydc_zdxdydz = f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t)d\boldsymbol{c}d\boldsymbol{r}$$

と表せるとき、$f$ を速度分布関数という。

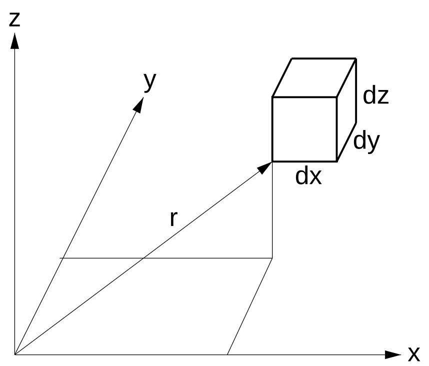


図 1.1 物理空間の微小体積要素

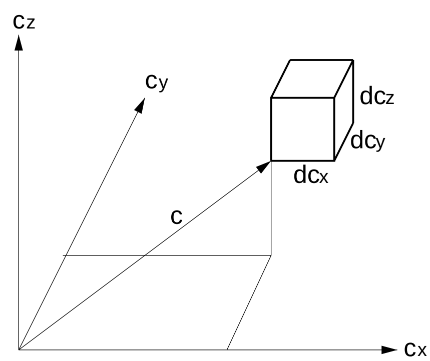


図 1.2 速度空間の微小体積要素

● 注) 文献によってはここで定義したものとは異なった定義の速度分布関数が用いられている場合がありますから注意して下さい。例えば、文献 [1] ではここで定義した $f$ を $\int f d\boldsymbol{c}$ で規格化した $f/\int f d\boldsymbol{c}$ を、文献 [2] ではここで定義した $f$ に分子 1 個の質量 $m$ を掛けた $mf$ を速度分布関数としています。

## A.2 マクロ物理量の定義 (単一種気体の場合)

速度分布関数 $f$ が与えられたとき単一種気体のマクロ物理量は以下のように定義される。

• 分子数密度 (1/m$^3$)

分子数密度 $n$ は速度分布関数 $f$ の定義から

$$n(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(c_x,c_y,c_z,x,y,z,t)dc_x dc_y dc_z$$

となる。繁雑さを避けるために関数の引数を省略して

$$n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f dc_x dc_y dc_z$$

と書き、さらに全速度空間にわたる 3 重積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots dc_x dc_y dc_z$ を $\int\cdots d\boldsymbol{c}$ と略記して

$$n = \int f d\boldsymbol{c} \tag{A.1}$$

と書く。以下同様の記法を用いる。

• 密度 (kg/m$^3$)

密度 $\rho$ は、分子 1 個の質量を $m$ として

$$\rho = mn = m\int f d\boldsymbol{c} \tag{A.2}$$

と定義される。

• 流速 (m/s)

流速 $x$ 成分 $V_x$ は

$$V_x = \frac{1}{n}\int c_x f d\boldsymbol{c}\ , \tag{A.3}$$

流速 $y$ 成分 $V_y$ は

$$V_y = \frac{1}{n}\int c_y f d\boldsymbol{c}\ , \tag{A.4}$$

流速 $z$ 成分 $V_z$ は

$$V_z = \frac{1}{n}\int c_z f d\boldsymbol{c} \tag{A.5}$$

と定義される。流速ベクトルを $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y, V_z)$ とすれば式 $(A.3) \sim (A.5)$ は、まとめて

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{n}\int \boldsymbol{c} f d\boldsymbol{c} \tag{A.6}$$

と書かれる。

一般に分子速度の $x, y, z$ 成分 $c_x, c_y, c_z$ の関数 $\phi(c_x, c_y, c_z)$ があるとき

$$\overline{\phi} = \frac{\int \phi f d\boldsymbol{c}}{\int f d\boldsymbol{c}} = \frac{1}{n} \int \phi f d\boldsymbol{c} \tag{A.7}$$

で定義される $\overline{\phi}$ を $\phi$ の平均 (期待値) という。

これによれば流速 $\boldsymbol{V}$ は、分子速度 $\boldsymbol{c}$ の平均

$$\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{c}} \tag{A.8}$$

となる。

• 温度 (K)

分子速度 $\boldsymbol{c}$ の流速 $\boldsymbol{V}$ に対する相対速度

$$\boldsymbol{C} = (C_x, C_y, C_z) = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{V} = (c_x - V_x, c_y - V_y, c_z - V_z) \tag{A.9}$$

を熱速度 (peculiar velocity) といい、分子の熱運動の速度を表す。温度 $T$ は分子の熱運動の並進運動エネルギーの平均と結び付けられ

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\overline{\boldsymbol{C}^2} \tag{A.10}$$

と定義される。ここで、$k$ はボルツマン定数 $k = 1.380658 \times 10^{-23}$(J/K)(CODATA1986 年調整値) である。

式 (A.10) を $T$ について解けば

$$T = \frac{m}{3k}\overline{\boldsymbol{C}^2} = \frac{1}{3Rn}\int \boldsymbol{C}^2 f d\boldsymbol{c} = \frac{1}{3Rn}\int (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V})^2 f d\boldsymbol{c} \tag{A.11}$$

となる。ここで、$R = k/m$ は気体の単位質量当り気体定数で具体的な値は、

$$R = \frac{k}{m} = \frac{\hat{R}}{M} \quad \text{(J/(kgK))} \tag{A.12}$$

により求められる。$\hat{R}$ は 1mol 当り気体定数 $\hat{R} = 8.314510$(J/(molK))(CODATA1986 年調整値)、$M$ は分子 1mol の質量 (kg/mol) である。

温度 $T$ の定義式中の因子 $\overline{\boldsymbol{C}^2} = \overline{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{V})^2} = \overline{(\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{c}})^2}$ は、分子速度 $\boldsymbol{c}$ の平均 $\overline{\boldsymbol{c}}$ のまわりのバラツキの程度を表す分散であるから、温度 $T$ は分子運動速度の乱雑さの程度を表す。

式 $(A.11)$ で定義される $T$ は気体運動論的並進温度と呼ばれるものであり、系の平衡非平衡と無関係に定義される量である。この $T$ は系が平衡状態にある場合には熱力学的温度と一致することが示されており [3]、平衡状態に対してのみ定義される状態量である熱力学的温度の拡張になっている。

式 (A.11) を

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{3Rn}\int\left\{(c_x-V_x)^2+(c_y-V_y)^2+(c_z-V_z)^2\right\}fd\boldsymbol{c} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{Rn}\int(c_x-V_x)^2fd\boldsymbol{c}+\frac{1}{Rn}\int(c_y-V_y)^2fd\boldsymbol{c}+\frac{1}{Rn}\int(c_z-V_z)^2fd\boldsymbol{c}\right\} \end{aligned}$$

と書き直し

$$T_x=\frac{1}{Rn}\int(c_x-V_x)^2fd\boldsymbol{c}=\frac{1}{R}\overline{(c_x-V_x)^2} \tag{A.13}$$

$$T_y=\frac{1}{Rn}\int(c_y-V_y)^2fd\boldsymbol{c}=\frac{1}{R}\overline{(c_y-V_y)^2} \tag{A.14}$$

$$T_z=\frac{1}{Rn}\int(c_z-V_z)^2fd\boldsymbol{c}=\frac{1}{R}\overline{(c_z-V_z)^2} \tag{A.15}$$

とおけば

$$T=\frac{1}{3}(T_x+T_y+T_z) \tag{A.16}$$

となる。$T_x, T_y, T_z$ をそれぞれ $x, y, z$ 方向の並進温度という。平衡状態では $T_x=T_y=T_z=T$ となるから、各方向の並進温度の相違の程度は状態の非平衡性の程度を表す。

● 圧力 (Pa)

分子の熱運動による運動量流束テンソル (圧力テンソル)$\mathbf{p}$は、熱速度$\boldsymbol{C}$の $x, y, z$ 成分 $C_x, C_y, C_z$ により

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} \rho\overline{C_xC_x} & \rho\overline{C_xC_y} & \rho\overline{C_xC_z} \\ \rho\overline{C_yC_x} & \rho\overline{C_yC_y} & \rho\overline{C_yC_z} \\ \rho\overline{C_zC_x} & \rho\overline{C_zC_y} & \rho\overline{C_zC_z} \end{bmatrix} \tag{A.17}$$

と定義され、圧力 $p$ はテンソル $\mathbf{p}$ のトレースの 1/3 として

$$p=\frac{1}{3}\rho(\overline{C_x^2}+\overline{C_y^2}+\overline{C_z^2})=\frac{1}{3}\rho\overline{\boldsymbol{C}^2} \tag{A.18}$$

と定義される。この $p$ は系の状態の平衡非平衡と無関係に定義され、系が非平衡状態にある場合には等方的な静水圧力になるとは限らない。一方、系が平衡状態にある場合は圧力 $p$ は熱力学的状態量の圧力と一致する。

式 (A.11) と式 (A.18) から $\overline{\boldsymbol{C}^2}$ を消去すれば

$$p=nkT \tag{A.19}$$

を得る。式 (A.19) は系が平衡状態にある場合は、理想気体の状態方程式と一致する。

• 熱流束 (J/(m$^2$s))

熱流束ベクトル$\boldsymbol{q}$は

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\rho\overline{C^2\boldsymbol{C}} \tag{A.20}$$

と定義される。成分で書けば

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{1}{2}\rho\overline{C^2C_x} = \frac{1}{2}\rho\overline{C_x(C_x^2+C_y^2+C_z^2)} \\ &= \frac{1}{2}m\int(c_x-V_x)\left\{(c_x-V_x)^2+(c_y-V_y)^2+(c_z-V_z)^2\right\}fd\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} q_y &= \frac{1}{2}\rho\overline{C^2C_y} = \frac{1}{2}\rho\overline{C_y(C_x^2+C_y^2+C_z^2)} \\ &= \frac{1}{2}m\int(c_y-V_y)\left\{(c_x-V_x)^2+(c_y-V_y)^2+(c_z-V_z)^2\right\}fd\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned} q_z &= \frac{1}{2}\rho\overline{C^2C_z} = \frac{1}{2}\rho\overline{C_z(C_x^2+C_y^2+C_z^2)} \\ &= \frac{1}{2}m\int(c_z-V_z)\left\{(c_x-V_x)^2+(c_y-V_y)^2+(c_z-V_z)^2\right\}fd\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.23}$$

となる。

または、

$$\begin{aligned} &\overline{C^2\boldsymbol{C}} = \overline{(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{V})^2\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{V})} = \overline{(\boldsymbol{c}^2-2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V}+V^2)\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{V})} \\ =\ & \overline{c^2\boldsymbol{c}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{c}} + \overline{V^2\boldsymbol{c}} - (\overline{c^2\boldsymbol{V}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}} + \overline{V^2\boldsymbol{V}}) \\ =\ & \overline{c^2\boldsymbol{c}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{c}} + V^2\overline{\boldsymbol{c}} - \overline{c^2}\boldsymbol{V} + 2(\overline{\boldsymbol{c}}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V} - V^2\boldsymbol{V} \\ =\ & \overline{c^2\boldsymbol{c}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{c}} + V^2\boldsymbol{V} - \overline{c^2}\boldsymbol{V} + 2(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V} - V^2\boldsymbol{V} \\ =\ & \overline{c^2\boldsymbol{c}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{c}} - \overline{c^2}\boldsymbol{V} + 2V^2\boldsymbol{V} \\ =\ & \overline{c^2\boldsymbol{c}} - 2\overline{(c_xV_x+c_yV_y+c_zV_z)\boldsymbol{c}} - \overline{c^2}\boldsymbol{V} + 2V^2\boldsymbol{V} \end{aligned}$$

より、

$$q_x = \frac{1}{2}\rho\left\{\overline{c^2c_x} - 2(\overline{c_x^2}V_x + \overline{c_xc_y}V_y + \overline{c_zc_x}V_z) - \overline{c^2}V_x + 2V^2V_x\right\} \tag{A.24}$$

$$q_y = \frac{1}{2}\rho\left\{\overline{c^2c_y} - 2(\overline{c_xc_y}V_x + \overline{c_y^2}V_y + \overline{c_yc_z}V_z) - \overline{c^2}V_y + 2V^2V_y\right\} \tag{A.25}$$

$$q_z = \frac{1}{2}\rho\left\{\overline{c^2c_z} - 2(\overline{c_zc_x}V_x + \overline{c_yc_z}V_y + \overline{c_z^2}V_z) - \overline{c^2}V_z + 2V^2V_z\right\} \tag{A.26}$$

となる。ここで

$$c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \quad , \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

である。

## A.3 マクロ物理量の定義 (混合気体の場合)

混合気体の場合、速度分布関数は混合気体を構成する各成分気体ごとに定義される。$M$ 種の成分気体からなる混合気体の第 $s$ 番目の成分気体 (以下、成分気体 $s$ と略記する) の速度分布関数を $f_s(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t)$ とする。

成分気体 $s$ の速度分布関数 $f_s(s = 1, 2, \cdots, M)$ が与えられたとき混合気体のマクロ物理量は以下のように定義される。

• 分子数密度 (1/m$^3$)

成分気体 $s$ の分子数密度 $n_s$ は、速度分布関数の定義から

$$n_s = \int f_s d\boldsymbol{c} \qquad (s = 1, 2, \cdots, M) \tag{A.27}$$

となる。

混合気体の分子数密度 $n$ は

$$n = \sum_{s=1}^{M} n_s = \sum_{s=1}^{M} \int f_s d\boldsymbol{c} \tag{A.28}$$

と定義される。

• 密度 (kg/m$^3$)

成分気体 $s$ の密度 $\rho_s$ は、成分気体 $s$ の分子 1 個の質量を $m_s$ として

$$\rho_s = m_s n_s = m_s \int f_s d\boldsymbol{c} \qquad (s = 1, 2, \cdots, M) \tag{A.29}$$

と定義される。

混合気体の密度 $\rho$ は

$$\rho = \sum_{s=1}^{M} \rho_s = \sum_{s=1}^{M} m_s n_s = \sum_{s=1}^{M} m_s \int f_s d\boldsymbol{c} \tag{A.30}$$

と定義される。

• 流速 (m/s)

成分気体 $s$ の流速 $\boldsymbol{V}_s$ は、

$$\boldsymbol{V}_s = \frac{1}{n_s} \int \boldsymbol{c} f_s d\boldsymbol{c} \tag{A.31}$$

と定義される。

混合気体では各成分気体の流速 $\boldsymbol{V}_s$ を密度 $\rho_s$ によって加重平均した質量流速 (mass-velocity)$\boldsymbol{V}_{mass}$

$$\boldsymbol{V}_{mass} = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{M} \rho_s \boldsymbol{V}_s = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{M} m_s \int \boldsymbol{c}_s f_s d\boldsymbol{c}_s \tag{A.32}$$

が定義される。ここで $\boldsymbol{c}_s$ は分子速度$\boldsymbol{c}$に添字 $s$ を付けて成分気体 $s$ の分子速度であることを明示したものである。定義から明らかなように $\rho\boldsymbol{V}_{mass}$ は混合気体の質量流束ベクトルを表す。

また、成分気体 $s$ の流速 $\boldsymbol{V}_s$ と質量流速 $\boldsymbol{V}_{mass}$ との差

$$\boldsymbol{V}_{Ds} = \boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_{mass} \tag{A.33}$$

を成分気体 $s$ の拡散速度という。

分子速度の $x, y, z$ 成分 $c_x, c_y, c_z$ の関数 $\phi(c_x, c_y, c_z)$ があるとき、

$$\overline{\phi_s} = \frac{\int \phi_s f_s d\boldsymbol{c}_s}{\int f_s d\boldsymbol{c}_s} = \frac{1}{n_s}\int \phi_s f_s d\boldsymbol{c}_s \tag{A.34}$$

で定義される $\overline{\phi_s}$ を $\phi$ の成分気体 $s$ に関する平均 (期待値) という。ここで、$\phi_s$ は $\phi$ が成分気体 $s$ の分子速度の関数であることを明示したものである。また $\overline{\phi_s}$ を分子数密度 $n_s$ で加重平均した

$$\overline{\phi} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s\overline{\phi_s} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M}\int \phi_s f_s d\boldsymbol{c}_s \tag{A.35}$$

を $\phi$ の混合気体に関する平均という。

これによれば成分気体 $s$ の流速 $\boldsymbol{V}_s$ は

$$\boldsymbol{V}_s = \overline{\boldsymbol{c}_s} \tag{A.36}$$

となる。また、質量流速 $\boldsymbol{V}_{mass}$ は

$$\boldsymbol{V}_{mass} = \frac{1}{\rho}\sum_{s=1}^{M}\rho_s\overline{\boldsymbol{c}_s} \tag{A.37}$$

となる。

• 温度 (K)

混合気体の場合、成分気体 $s$ 分子の熱速度 $\boldsymbol{C}_s$ は分子速度 $\boldsymbol{c}_s$ の質量流速 $\boldsymbol{V}_{mass}$ に対する相対速度として

$$\boldsymbol{C}_s = (C_{xs}, C_{ys}, C_{zs}) = \boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_{mass} = (c_{xs} - V_{mass,x}\ ,\ c_{ys} - V_{mass,y}\ ,\ c_{zs} - V_{mass,z}) \tag{A.38}$$

と定義される。

混合気体の温度 $T$ は、各成分気体 $s$ 分子の熱運動の並進運動エネルギーの混合気体に関する平均に結び付けられ

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s\frac{1}{2}m_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M}\int\frac{1}{2}m_s\boldsymbol{C}_s^2 f_s d\boldsymbol{c}_s \tag{A.39}$$

と定義される。$T$ について解けば

$$T = \frac{1}{3nk}\sum_{s=1}^{M}\rho_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3n}\sum_{s=1}^{M}\frac{n_s m_s}{k}\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3n}\sum_{s=1}^{M}\frac{n_s}{R_s}\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3n}\sum_{s=1}^{M}\frac{1}{R_s}\int \boldsymbol{C}_s^2 f_s d\boldsymbol{c}_s \qquad (A.40)$$

となる。ここで $R_s = k/m_s$ は成分気体 $s$ の単位質量当り気体定数である。

成分気体 $s$ の温度 $T_s$ は

$$\frac{3}{2}kT_s = \frac{1}{2}m_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2} \qquad (A.41)$$

より

$$T_s = \frac{m_s}{3k}\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3R_s}\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3R_s n_s}\int \boldsymbol{C}_s^2 f_s d\boldsymbol{c}_s \quad (s = 1, 2, \cdots M) \qquad (A.42)$$

と定義される。

式 (A.40),(A.42) より混合気体の温度 $T$ は、各成分気体 $s$ の温度 $T_s$ により

$$T = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s T_s \qquad (A.43)$$

と表される。系が平衡状態にあるときは、各成分気体 $s$ の温度 $T_s(s = 1, 2, \cdots M)$ と混合気体の温度 $T$ は一致するから、成分気体温度の相違の程度は状態の非平衡性の程度を表す。

式 (A.42) を

$$T_s = \frac{1}{3R_s n_s}\int \left\{(c_{xs} - V_{mass,x})^2 + (c_{ys} - V_{mass,y})^2 + (c_{zs} - V_{mass,z})^2\right\} f_s d\boldsymbol{c}_s$$

と書き直し、

$$T_{xs} = \frac{1}{R_s n_s}\int (c_{xs} - V_{mass,x})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{R_s}\overline{(c_{xs} - V_{mass,x})^2} \qquad (A.44)$$

$$T_{ys} = \frac{1}{R_s n_s}\int (c_{ys} - V_{mass,y})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{R_s}\overline{(c_{ys} - V_{mass,y})^2} \qquad (A.45)$$

$$T_{zs} = \frac{1}{R_s n_s}\int (c_{zs} - V_{mass,z})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{R_s}\overline{(c_{zs} - V_{mass,z})^2} \qquad (A.46)$$

とおけば

$$T_s = \frac{1}{3}(T_{xs} + T_{ys} + T_{zs}) \qquad (A.47)$$

となる。$T_{xs}, T_{ys}, T_{zs}(s = 1, 2, \cdots M)$ を、それぞれ成分気体 $s$ の $x, y, z$ 方向の並進温度という。

混合気体の $x, y, z$ 方向の並進温度 $T_x, T_y, T_z$ は

$$T_x = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s T_{xs} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M}\frac{1}{R_s}\int (c_{xs} - V_{mass,x})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M}\frac{1}{R_s}\overline{(c_{xs} - V_{mass,x})^2} \qquad (A.48)$$

$$T_y = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s T_{ys} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} \frac{1}{R_s}\int (c_{ys} - V_{mass,y})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} \frac{1}{R_s}\overline{(c_{ys} - V_{mass,y})^2} \quad (A.49)$$

$$T_z = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} n_s T_{zs} = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} \frac{1}{R_s}\int (c_{zs} - V_{mass,z})^2 f_s d\boldsymbol{c}_s = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{M} \frac{1}{R_s}\overline{(c_{zs} - V_{mass,z})^2} \quad (A.50)$$

と定義される。式 (A.43), 式 $(A.47) \sim (A.50)$ より混合気体の温度 $T$ は

$$T = \frac{1}{3}(T_x + T_y + T_z) \quad (A.51)$$

と表される。平衡状態においては全ての $x, y, z$ 方向の並進温度は温度 $T$ に一致するから、各方向の並進温度の相違の程度は状態の非平衡性の程度を表す。

成分気体 $s$ 分子の速度 $\boldsymbol{c}_s$ の成分気体速度 $\boldsymbol{V}_s = \overline{\boldsymbol{c}_s}$ に対する相対速度 $\boldsymbol{C}'_s$ を

$$\boldsymbol{C}'_s = \boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_s \quad (A.52)$$

とすれば、式 (A.38) の熱速度 $\boldsymbol{C}_s$ は

$$\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_{mass} = \boldsymbol{C}'_s + \boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_{mass} = \boldsymbol{C}'_s + \boldsymbol{V}_{Ds} \quad (A.53)$$

と表される。これにより式 (A.42) 中の $\overline{\boldsymbol{C}_s^2}$ は

$$\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \overline{(\boldsymbol{C}'_s + \boldsymbol{V}_{Ds})^2} = \overline{(\boldsymbol{C}'_s)^2} + 2\overline{\boldsymbol{C}'_s}.\boldsymbol{V}_{Ds} + (V_{Ds})^2 = \overline{(\boldsymbol{C}'_s)^2} + (V_{Ds})^2$$

となり、式 (A.42) は

$$T_s = \frac{1}{3R_s}\left\{\overline{(\boldsymbol{C}'_s)^2} + (V_{Ds})^2)\right\} \quad (A.54)$$

となる。式 (A.54) を

$$\begin{aligned}
T_s &= \frac{1}{3R_s}\left\{\overline{(\boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_s)^2} + (V_{Ds})^2)\right\} \\
&= \frac{1}{3R_s}\left\{\overline{(c_{xs} - V_{xs})^2 + (c_{ys} - V_{ys})^2 + (c_{zs} - V_{zs})^2} + (V_{Dxs}^2 + V_{Dys}^2 + V_{Dzs}^2)\right\} \\
&= \frac{1}{3R_s}\left\{\overline{(c_{xs} - V_{xs})^2} + V_{Dxs}^2 + \overline{(c_{ys} - V_{ys})^2} + V_{Dys}^2 + \overline{(c_{zs} - V_{zs})^2} + V_{Dzs}^2)\right\}
\end{aligned} \quad (A.55)$$

と書き、式 (A.44)∼(A.46) を参照すれば、

$$T_{xs} = \frac{1}{R_s}\left\{\overline{(c_{xs} - V_{xs})^2} + V_{Dxs}^2\right\} \quad (A.56)$$

$$T_{ys} = \frac{1}{R_s}\left\{\overline{(c_{ys} - V_{ys})^2} + V_{Dys}^2\right\} \quad (A.57)$$

$$T_{zs} = \frac{1}{R_s}\left\{\overline{(c_{zs} - V_{zs})^2} + V_{Dzs}^2\right\} \quad (A.58)$$

と表せる。

● 圧力 (Pa)

成分気体 $s$ 分子の熱運動による運動量流束テンソル (圧力テンソル)$\mathbf{p}_s$ は、熱速度$\boldsymbol{C_s}$の $x, y, z$ 成分 $C_{xs}, C_{ys}, C_{zs}$ により

$$\mathbf{p}_s = \begin{bmatrix} \rho_s\overline{C_{xs}C_{xs}} & \rho_s\overline{C_{xs}C_{ys}} & \rho_s\overline{C_{xs}C_{zs}} \\ \rho_s\overline{C_{ys}C_{xs}} & \rho_s\overline{C_{ys}C_{ys}} & \rho_s\overline{C_{ys}C_{zs}} \\ \rho_s\overline{C_{zs}C_{xs}} & \rho_s\overline{C_{zs}C_{ys}} & \rho_s\overline{C_{zs}C_{zs}} \end{bmatrix} \tag{A.59}$$

と定義され、成分気体 $s$ の圧力 $p_s$ はテンソル$\mathbf{p_s}$のトレースの 1/3 として

$$p_s = \frac{1}{3}\rho_s(\overline{C_{xs}^2} + \overline{C_{ys}^2} + \overline{C_{zs}^2}) = \frac{1}{3}\rho_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2} \tag{A.60}$$

と定義される。

式 (A.42) と式 (A.60) から $\overline{\boldsymbol{C}_s^2}$ を消去すれば

$$p_s = n_s k T_s \tag{A.61}$$

を得る。

混合気体の運動量流束テンソル $\mathbf{p}$ は、成分気体 $s$ の運動量流束テンソル$\mathbf{p_s}$の和として

$$\mathbf{p} = \sum_{s=1}^{M} \mathbf{p}_s \tag{A.62}$$

と定義される。

混合気体の圧力 $p$ は、このテンソル$\mathbf{p}$のトレースの 1/3 として

$$p = \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{M}\rho_s(\overline{C_{xs}^2} + \overline{C_{ys}^2} + \overline{C_{zs}^2}) = \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{M}\rho_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2} = \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{M} m_s \int \boldsymbol{C}_s^2 f_s d\boldsymbol{c}_s \tag{A.63}$$

と定義される。

式 (A.40) と式 (A.63) から $\sum_{s=1}^{M}\rho_s\overline{\boldsymbol{C}_s^2}$ を消去すれば

$$p = nkT \tag{A.64}$$

を得る。式 (A.64) は系が平衡状態にある場合は、理想気体の混合気体の状態方程式と一致する。

式 (A.60) と式 (A.63) から、混合気体の圧力 $p$ は成分気体 $s$ の分圧 $p_s$ の和として

$$p = \sum_{s=1}^{M} p_s \tag{A.65}$$

と表される。

● 熱流束 (J/(m$^2$s))

混合気体の熱流束ベクトル$\boldsymbol{q}$は、成分気体の熱流束ベクトル$\boldsymbol{q_s}$の和として

$$\boldsymbol{q} = \sum_{s=1}^{M} \boldsymbol{q}_s \tag{A.66}$$

と定義される。ここで成分気体の熱流束ベクトル$\boldsymbol{q_s}$は

$$\boldsymbol{q}_s = \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_s^2 \boldsymbol{C}_s} \tag{A.67}$$

である。成分で書けば

$$\begin{aligned} q_{xs} &= \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{xs} C_s^2} = \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{xs}(C_{xs}^2 + C_{ys}^2 + C_{zs}^2)} \\ &= \frac{1}{2} m_s \int (c_{xs} - V_{mass,x}) \left\{ (c_{xs} - V_{mass,x})^2 + (c_{ys} - V_{mass,y})^2 + (c_{zs} - V_{mass,z})^2 \right\} f_s d\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.68}$$

$$\begin{aligned} q_{ys} &= \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{ys} C_s^2} = \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{ys}(C_{xs}^2 + C_{ys}^2 + C_{zs}^2)} \\ &= \frac{1}{2} m_s \int (c_{ys} - V_{mass,y}) \left\{ (c_{xs} - V_{mass,x})^2 + (c_{ys} - V_{mass,y})^2 + (c_{zs} - V_{mass,z})^2 \right\} f_s d\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.69}$$

$$\begin{aligned} q_{zs} &= \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{zs} C_s^2} = \frac{1}{2}\rho_s \overline{C_{zs}(C_{xs}^2 + C_{ys}^2 + C_{zs}^2)} \\ &= \frac{1}{2} m_s \int (c_{zs} - V_{mass,z}) \left\{ (c_{xs} - V_{mass,x})^2 + (c_{ys} - V_{mass,y})^2 + (c_{zs} - V_{mass,z})^2 \right\} f_s d\boldsymbol{c} \end{aligned} \tag{A.70}$$

となる。

または、

$$\begin{aligned} & \overline{C_s^2 \boldsymbol{C}_s} = \overline{(\boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_{mass})^2 \cdot (\boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_{mass})} \\ = & \overline{(\boldsymbol{c}_s^2 - 2\boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass} + V_{mass}^2) \cdot (\boldsymbol{c}_s - \boldsymbol{V}_{mass})} \\ = & \overline{c_s^2 \boldsymbol{c}_s} - 2\overline{(\boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{c}_s} + \overline{V_{mass}^2 \boldsymbol{c}_s} - (\overline{c_s^2 \boldsymbol{V}_{mass}} - 2\overline{(\boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{V}_{mass}} + \overline{V_{mass}^2 \boldsymbol{V}_{mass}}) \\ = & \overline{c_s^2 \boldsymbol{c}_s} - 2\overline{(\boldsymbol{c_s} \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{c}_s} + V_{mass}^2 \overline{\boldsymbol{c_s}} - \overline{c_s^2}\boldsymbol{V}_{mass} + 2(\overline{\boldsymbol{c}_s} \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{V}_{mass} - V_{mass}^2 \boldsymbol{V}_{mass} \\ = & \overline{c_s^2 \boldsymbol{c}_s} - 2\overline{(\boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{c}_s} + V_{mass}^2 \boldsymbol{V}_s - \overline{c_s^2}\boldsymbol{V}_{mass} + 2(\boldsymbol{V}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{V}_{mass} - V_{mass}^2 \boldsymbol{V}_{mass} \\ = & \overline{c_s^2 \boldsymbol{c}_s} - 2\overline{(\boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{c}_s} - \overline{c_s^2}\boldsymbol{V}_{mass} + 2(\boldsymbol{V}_s \cdot \boldsymbol{V}_{mass})\boldsymbol{V}_{mass} + (\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_{mass})V_{mass}^2 \\ = & \overline{c_s^2 \boldsymbol{c}_s} - 2\overline{(c_{xs}V_{mass,x} + c_{ys}V_{mass,y} + c_{zs}V_{mass,z})\boldsymbol{c}_s} - \overline{c_s^2}\boldsymbol{V}_{mass} \\ & \qquad +2(V_{xs}V_{mass,x} + V_{ys}V_{mass,y} + V_{zs}V_{mass,z})\boldsymbol{V}_{mass} + V_{mass}^2 \boldsymbol{V}_{Ds} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} q_{xs} &= \frac{1}{2}\rho_s\left\{\overline{c_s^2 c_{xs}} - 2(\overline{c_{xs}^2}V_{mass,x} + \overline{c_{xs}c_{ys}}V_{mass,y} + \overline{c_{zs}c_{xs}}V_{mas,z}) - \overline{c_s^2}V_{mass,x}\right. \\ &\qquad \left. + 2V_{sm}V_{mass,x} + V_{mass}^2 V_{Dxs}\right\} \end{aligned} \quad (A.71)$$

$$\begin{aligned} q_{ys} &= \frac{1}{2}\rho_s\left\{\overline{c_s^2 c_{ys}} - 2(\overline{c_{xs}c_{ys}}V_{mass,x} + \overline{c_{ys}^2}V_{mass,y} + \overline{c_{ys}c_{zs}}V_{mas,z}) - \overline{c_s^2}V_{mass,y}\right. \\ &\qquad \left. + 2V_{sm}V_{mass,y} + V_{mass}^2 V_{Dys}\right\} \end{aligned} \quad (A.72)$$

$$\begin{aligned} q_{zs} &= \frac{1}{2}\rho_s\left\{\overline{c_s^2 c_{zs}} - 2(\overline{c_{zs}c_{xs}}V_{mass,x} + \overline{c_{ys}c_{zs}}V_{mass,y} + \overline{c_{zs}^2}V_{mass,z}) - \overline{c_s^2}V_{mass,z}\right. \\ &\qquad \left. + 2V_{sm}V_{mass,z} + V_{mass}^2 V_{Dzs}\right\} \end{aligned} \quad (A.73)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} c_s^2 &= c_{xs}^2 + c_{ys}^2 + c_{zs}^2 \quad , \quad V_{mass}^2 = V_{mass,x}^2 + V_{mass,y}^2 + V_{mass,z}^2 \\ V_{sm} &= V_{xs}V_{mass,x} + V_{ys}V_{mass,y} + V_{zs}V_{mass,z} \end{aligned}$$

である。

**参考文献**

[1]Vincenti,W.G. and Kruger,C.H. : Introduction to Physical Gas Dynamics, John Wiley and Sons, New York, 1967.

[2]Cercignai,C. : Mathematcal Methods in Kinetic Theory,Plenum Press, New York,1969.

[3]Chapmann,S. and Cowling T.G. : The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ.Press,Londin, 1953,pp.40-41.