自由分子流領域における衝撃波管問題

目　　次

1. 問題設定

図 1 に示すように隔壁の左側を高圧、右側を低圧とする衝撃波管問題において、隔壁左右の圧力レベルが十分低く自由分子流条件が成立しているとする。時刻 $t = 0$ に隔壁を除去した後の流れを文献 [1] を参考にして求める。

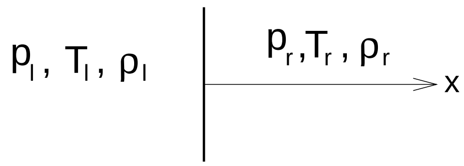

図.1　衝撃波管問題 ($p_l > p_r$)

p_l, p_r はそれぞれ隔壁左右の圧力、T_l, T_r はそれぞれ隔壁左右の温度、ρ_l, ρ_r はそれぞれ隔壁左右の密度である。これらの量は理想気体の状態方程式 $p_l = \rho_l RT_l, p_r = \rho_r RT_r$ により結び付けられる。ここで、R は単位質量当り気体定数である。

隔壁に垂直に x 軸を設定し、隔壁面内に y, z 軸を設定する。

2. 基礎式と初期条件

2.1 基礎式

自由分子流は、ボルツマン方程式右辺の衝突項を無視した

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

により記述される。ここで $f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t)$ は気体分子の速度分布関数、t は時間、$\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$ は気体分子の速度ベクトル、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は空間デカルト座標である。

2.2 マクロ量

密度 $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ は

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t) d\boldsymbol{c} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t) dc_x dc_y dc_z \tag{2}$$

マクロ流速 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ は

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) = \overline{\boldsymbol{c}} = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c} f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t) d\boldsymbol{c} = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r}, t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c} f(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}, t) dc_x dc_y dc_z \tag{3}$$

温度 $T(\boldsymbol{r},t)$ は

$$T(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{3R}\overline{\boldsymbol{C}^2} = \frac{1}{3R\rho(\boldsymbol{r},t)}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{C}^2 f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{c}$$
$$= \frac{1}{3R\rho(\boldsymbol{r},t)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\}^2 f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)dc_x dc_y dc_z \tag{4}$$

より、計算される。ここで、$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ は peculiar velocity である。

2.3 初期条件

隔壁両側の気体が図 1 に示された温度と密度の平衡状態にあると仮定すれば、分子の速度分布はマクスウェル分布となり、速度分布関数の初期条件 $f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},0)=f_0(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r})$ は

$$f_0(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r}) = \{1-H(x)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2+c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)$$
$$+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2+c_y^2+c_z^2}{2RT_r}\right) \tag{5}$$

となる。ここで、$H(x)$ はヘビサイドの階段関数で

$$H(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

である。

2.4 問題の 1 次元性の考慮

衝撃波管問題は x 方向にのみ流れが変化する 1 次元問題なので、y,z 方向への変化は無視され問題は簡単化される。速度分布関数 f は $(\boldsymbol{c},x,t)$ の関数となり、方程式 (1) は

$$\frac{\partial f}{\partial t}+c_x\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{6}$$

となる。

マクロ流速 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ の y,z 成分はゼロとなり、x 成分 $u_x(x,t)$ のみとなるので、式 (3) は

$$u_x(x,t)=\frac{1}{\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c_x f(\boldsymbol{c},x,t)dc_x dc_y dc_z \tag{7}$$

となる。

温度 $T(x,t)$ は式 (4) より

$$T(x,t)=\frac{1}{3R\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\{c_x-u_x(x,t)\}^2+c_y^2+c_z^2]f(\boldsymbol{c},x,t)dc_x dc_y dc_z \tag{8}$$

となる。

2.5 縮退分布関数の導入

ここで、以下の縮退分布関数

$$a(c_x, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z \tag{9}$$

と

$$b(c_x, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z \tag{10}$$

を導入する。

● 縮退分布関数の方程式

方程式 (6) 全体を c_y, c_z について $(-\infty, \infty)$ に渡って積分すれば、a に対する方程式

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_x \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

が得られ、方程式 (6) 全体に $(c_y^2 + c_z^2)$ を掛けた後 c_y, c_z について $(-\infty, \infty)$ に渡って積分すれば、b に対する方程式

$$\frac{\partial b}{\partial t} + c_x \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

が得られる。

● 縮退分布関数によるマクロ量

式 (2) より

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z\right]dc_x = \int_{-\infty}^{\infty} a(c_x, x, t)dc_x \tag{13}$$

式 (7) より

$$u_x(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)}\int_{-\infty}^{\infty} c_x\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z\right]dc_x = \frac{1}{\rho(x, t)}\int_{-\infty}^{\infty} c_x a(c_x, x, t)dc_x \tag{14}$$

式 (8) より

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{3R\rho(x, t)}\int_{-\infty}^{\infty}\{c_x - u_x(x, t)\}^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z\right]dc_x \\ &\quad + \frac{1}{3R\rho(x, t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2 + c_z^2) f(c_x, c_y, c_z, x, t)dc_y dc_z\right]dc_x \\ &= \frac{1}{3R\rho(x, t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\{c_x - u_x(x, t)\}^2 a(c_x, x, t) + b(c_x, x, t)\right]dc_x \end{aligned} \tag{15}$$

が得られる。

●縮退分布関数の初期条件

$a(c_x,x,t), b(c_x,x,t)$ に対する初期条件 $a_0(c_x,x), b_0(c_x,x)$ は、式 (9),(10) により

$$a_0(c_x,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x,c_y,c_z,x)dc_ydc_z \tag{16}$$

$$b_0(c_x,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2+c_z^2)f_0(c_x,c_y,c_z,x)dc_ydc_z \tag{17}$$

となり、式 (16),(17) に式 (5) の f_0 を代入すれば

$$a_0(c_x,x)=\{1-H(x)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right)+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \tag{18}$$

$$b_0(c_x,x)=\{1-H(x)\}\frac{2RT_l\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right)+H(x)\frac{2RT_r\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \tag{19}$$

となる (付録 A 参照)。

3. 方程式の初期値問題の解

以後簡単のために添字 x と引数を省略して

$$c_x\to c \quad , \quad u_x(x,t)\to u$$

と記す。

$a(c,x,t)$ に対する方程式 (11)

$$\frac{\partial a}{\partial t}+c\frac{\partial a}{\partial x}=0 \qquad \text{(11) 再記}$$

[この段階では c は単なるパラメータ] の初期値

$$a(c,x,0)=a_0(c,x) \tag{20}$$

に対する解を求める。

偏微分方程式 (11) の一般解は、常微分方程式

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{c} \quad , \quad \frac{dx}{dt}=c \tag{21}$$

の積分

$$x=ct+C_1 \quad , \quad x-ct=C_1=\text{定数} \tag{22}$$

より、$\phi(x)$ を任意関数として

$$a(c,x,t) = \phi(C_1) = \phi(x-ct) \tag{23}$$

と求められる [2]。

任意関数 $\phi(x)$ の具体形は初期条件から定められる。$t=0$ のときの式 (23) は $a(c,x,0) = \phi(x)$ となり、これが初期条件 (20) より $a_0(c,x)$ に等しいことにより $\phi(x) = a_0(c,x)$ となる。

以上より、方程式 (11) の初期条件 (20) の解は

$$a(c,x,t) = a_0(c,x-ct) \tag{24}$$

となる。

同様にして、$b(c,x,t)$ に対する方程式 (12) の初期条件 $b(c,x,0) = b_0(c,x)$ に対する解は

$$b(c,x,t) = b_0(c,x-ct) \tag{25}$$

となる。

4. マクロ量の計算式

式 (13),(14),(15) の縮退分布関数によるマクロ量の計算式に式 (24),(25) を代入する。

• 密度

式 (13) より

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(c,x,t)dc = \int_{-\infty}^{\infty} a_0(c,x-ct)dc \tag{26}$$

積分変数を

$$y = x-ct \quad , \quad c = \frac{x-y}{t} \quad , \quad dc = -\frac{dy}{t} \tag{27}$$

と変数変換する。

$$\rho(x,t) = \int_{\infty}^{-\infty} a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)\frac{dy}{-t} = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \tag{28}$$

• マクロ流速

式 (14) より

$$u(x,t) = \frac{1}{\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty} ca(c,x,t)dc = \frac{1}{\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty} ca_0(c,x-ct)dc \tag{29}$$

積分変数の変数変換 (27) より

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\rho(x,t)}\int_{\infty}^{-\infty}\left(\frac{x-y}{t}\right)a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)\frac{dy}{-t} \\
&= \frac{1}{\rho(x,t)t^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-y)a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \\
&= \frac{x}{\rho(x,t)t}\underline{\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy} - \frac{1}{\rho(x,t)t^2}\int_{-\infty}^{\infty}ya_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x,t)t^2}\int_{-\infty}^{\infty}ya_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \qquad (30)
\end{aligned}
$$

下線部の積分に式 (28) を用いた。

• 温度

式 (15) より

$$
\begin{aligned}
&T(x,t) \\
=\ & \frac{1}{3R\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(c-u)^2a(c,x,t)+b(c,x,t)\right]dc \\
=\ & \frac{1}{3R\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(c-u)^2a_0(c,x-ct)+b_0(c,x-ct)\right]dc \\
=\ & \frac{1}{3R\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}(c-u)^2a_0(c,x-ct)dc + \frac{1}{3R\rho(x,t)}\int_{-\infty}^{\infty}b_0(c,x-ct)dc \qquad (31)
\end{aligned}
$$

積分変数の変数変換 (27) より

$$
\begin{aligned}
T(x,t) &= \frac{1}{3R\rho(x,t)t}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-y}{t}-u\right)^2a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \\
&\quad + \frac{1}{3R\rho(x,t)t}\int_{-\infty}^{\infty}b_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \qquad (32)
\end{aligned}
$$

式 (32) 右辺第 1 項の積分 I は

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-y}{t}-u\right)^2a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x}{t}-u-\frac{y}{t}\right)^2a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{t}-u\right)^2-2\left(\frac{x}{t}-u\right)\frac{y}{t}+\frac{y^2}{t^2}\right]a_0\left(\frac{x-y}{t},y\right)dy
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{x}{t}-u\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy - 2\left(\frac{x}{t}-u\right)\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} y a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy$$

$$+\frac{1}{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy \tag{33}$$

式 (28) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy = t\rho(x,t) \tag{34}$$

式 (30) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} y a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy = t^2\rho(x,t)\left(\frac{x}{t}-u\right) \tag{35}$$

なので、式 (34),(35) を式 (33) に代入すれば

$$I = \left(\frac{x}{t}-u\right)^2 [t\rho(x,t)] - 2\left(\frac{x}{t}-u\right)\frac{1}{t}\left[t^2\rho(x,t)\left(\frac{x}{t}-u\right)\right] + \frac{1}{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy$$

$$= -t\rho(x,t)\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{1}{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy$$

この I を式 (32) に代入して

$$T(x,t) = -\frac{1}{3R}\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 a_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy$$

$$+\frac{1}{3R\rho(x,t)t}\int_{-\infty}^{\infty} b_0\left(\frac{x-y}{t}, y\right) dy \tag{36}$$

5. 衝撃波管問題のマクロ量

式 (28),(30),(36) のマクロ量の計算式に衝撃波管問題の初期条件式 (18),(19) を代入して、衝撃波管問題のマクロ量を求める。

5.1 密度

式 (28) に式 (18) を代入して

$$\rho(x,t)$$

$$= \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\{1-H(y)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2}\right\} + H(y)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2}\right\}\right] dy$$

$$= \frac{1}{t}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2}\right\} dy + \frac{1}{t}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\int_{0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2}\right\} dy \tag{37}$$

右辺第 1,2 項の積分に、付録 B の公式 (B.2),(B.1) を適用すれば、

$$
\begin{aligned}
&\rho(x,t) \\
&= \frac{1}{t}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\frac{\sqrt{2\pi RT_l}t}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)+\frac{1}{t}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\frac{\sqrt{2\pi RT_r}t}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right) \\
&= \frac{\rho_l}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)+\frac{\rho_r}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

ここで

$$\xi=\frac{x}{t} \qquad (39)$$

と置けば

$$\rho(x,t)=\frac{\rho_l}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}}\right)+\frac{\rho_r}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}}\right) \qquad (40)$$

5.2 マクロ流速

式 (30) に式 (18) を代入して

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{x}{t}-\frac{1}{\rho(x,t)t^2}\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\{1-H(y)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_lt^2}\right\}\right. \\
&\qquad \left.+H(y)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_rt^2}\right\}\right]dy \\
&= \frac{x}{t}-\frac{1}{\rho(x,t)t^2}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0}y\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_lt^2}\right\}dy \\
&\qquad -\frac{1}{\rho(x,t)t^2}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\int_{0}^{\infty}y\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_rt^2}\right\}dy \qquad (41)
\end{aligned}
$$

右辺第 2,3 項の積分に、付録 B の公式 (B.4),(B.3) を適用すれば、

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) \\
&= \frac{x}{t}-\frac{1}{\rho(x,t)t^2}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\left[\frac{x\sqrt{2\pi RT_l}t}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)-\frac{2RT_lt^2}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_lt^2}\right)\right] \\
&\qquad -\frac{1}{\rho(x,t)t^2}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\left[\frac{x\sqrt{2\pi RT_r}t}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right)+\frac{2RT_rt^2}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x}{t} - \frac{\rho_l}{2\rho(x,t)}\left[\frac{x}{t}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right) - \sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_lt^2}\right)\right] \\
&\quad -\frac{\rho_r}{2\rho(x,t)}\left[\frac{x}{t}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right) + \sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right] \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x,t)}\frac{x}{t}\left[\frac{\rho_l}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right) + \frac{\rho_r}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2\rho(x,t)}\left[\rho_l\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_lt^2}\right) - \rho_r\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right] \\
&= \frac{x}{t} - \frac{1}{\rho(x,t)}\frac{x}{t}\left[\rho(x,t)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2\rho(x,t)}\left[\rho_l\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_lt^2}\right) - \rho_r\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\rho(x,t)}\left[\rho_l\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_lt^2}\right) - \rho_r\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right] \qquad (42)
\end{aligned}
$$

式 (39) の $\xi = x/t$ より

$$
u(x,t) = \frac{1}{2\rho(x,t)}\left[\rho_l\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_l}\right) - \rho_r\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_r}\right)\right] \qquad (43)
$$

5.3 温度

式 (36) に式 (18),(19) を代入して

$$
\begin{aligned}
&T(x,t) \\
&= -\frac{1}{3R}\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\left[\{1-H(y)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_lt^2}\right\}\right. \\
&\qquad \left. +H(y)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_rt^2}\right\}\right] dy \\
&\quad +\frac{1}{3R\rho(x,t)t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\{1-H(y)\}\frac{2RT_l\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_lt^2}\right\}\right. \\
&\qquad \left. +H(y)\frac{2RT_r\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_rt^2}\right\}\right] dy
\end{aligned}
$$

$$= \; -\frac{1}{3R}\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0} y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2}\right\} dy$$

$$+\frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\int_{0}^{\infty} y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2}\right\} dy$$

$$+\frac{1}{3R\rho(x,t)t}\frac{2RT_l\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2}\right\} dy$$

$$+\frac{1}{3R\rho(x,t)t}\frac{2RT_r\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2}\right\} dy \tag{44}$$

右辺第 2,3 項の積分に、付録 B の公式 (B.6),(B.5) を適用し、第 4,5 項を若干書き換え

$$T(x,t)$$

$$= \; -\frac{1}{3R}\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\left[\frac{(2RT_l t^2+2x^2)\sqrt{2RT_l\pi}t}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{2RT_l t^2 x}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{3R\rho(x,t)t^3}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\left[\frac{(2RT_r t^2+2x^2)\sqrt{2RT_r\pi}t}{4}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right)\right.$$

$$\left. +\frac{2RT_r t^2 x}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_r t^2}\right)\right]$$

$$+\frac{2T_l}{3\rho(x,t)}\underline{\frac{1}{t}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_l t^2}\right\} dy}$$

$$+\frac{2T_r}{3\rho(x,t)}\underline{\frac{1}{t}\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2RT_r t^2}\right\} dy}$$

$$= \; -\frac{1}{3R}\left(\frac{x}{t}-u\right)^2 + \frac{\rho_l}{3R\rho(x,t)}\left[\frac{2RT_l+2(x/t)^2}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{(x/t)}{2}\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_l t^2}\right)\right]$$

$$+\frac{\rho_r}{3R\rho(x,t)}\left[\frac{2RT_r+2(x/t)^2}{4}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right)+\frac{(x/t)}{2}\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2RT_rt^2}\right)\right]$$

$$+\frac{2T_l}{3\rho(x,t)}\frac{\rho_l}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2RT_l}t}\right)+\frac{2T_r}{3\rho(x,t)}\frac{\rho_r}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{2RT_r}t}\right) \tag{45}$$

(下線部の積分は式 (37)(38) で既出)

式 (38) の $\xi = x/t$ より

$$T(x,t)$$

$$= -\frac{1}{3R}(\xi-u)^2+\frac{\rho_l}{3R\rho(x,t)}\frac{1}{2}\left[\frac{2RT_l+2\xi^2}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}}\right)-\sqrt{\frac{2RT_l}{\pi}}\xi\exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_l}\right)\right]$$

$$+\frac{\rho_r}{3R\rho(x,t)}\frac{1}{2}\left[\frac{2RT_r+2\xi^2}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}}\right)+\sqrt{\frac{2RT_r}{\pi}}\xi\exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_r}\right)\right]$$

$$+\frac{2T_l}{3\rho(x,t)}\frac{\rho_l}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2RT_l}}\right)+\frac{2T_r}{3\rho(x,t)}\frac{\rho_r}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{\xi}{\sqrt{2RT_r}}\right) \tag{46}$$

式 (46) 右辺第 1,2,3 項は x 方向の並進温度、第 4,5 項は y,z 方向の並進温度に相当する。

参考文献

[1]Narasimha,R. : Collisionless expansion of gases into vacuum : Journal of Fluid Mechanics Vol.12(1962),pp.294-308.

[2] 吉江琢児：初等第一階偏微分方程式：裳華房 1947 年

付録 A. 縮退分布関数の初期条件

●$a(c_x, x, t)$ に対する初期条件 $a_0(c_x, x)$ は、本文式 (16) の f_0 に本文式 (5) を代入して

$$a_0(c_x, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z$$

$$= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right) dc_z$$

$$+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_r}\right) dc_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_r}\right) dc_z \quad (A.1)$$

積分公式

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (A.2)$$

で $n = 0$ とした

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/2} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \quad (A.3)$$

により

$$a_0(c_x, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z$$

$$= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) (2\pi RT_l)^{1/2}(2\pi RT_l)^{1/2}$$

$$+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) (2\pi RT_r)^{1/2}(2\pi RT_r)^{1/2}$$

$$= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) + H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right) \quad (A.4)$$

●$b(c_x, x, t)$ に対する初期条件 $b_0(c_x, x)$ は、本文式 (17) の f_0 に本文式 (5) を代入して

$$b_0(c_x, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) f_0(c_x, c_y, c_z, x) dc_y dc_z$$

$$= \{1 - H(x)\} \frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right) \underline{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (c_y^2 + c_z^2) \exp\left(-\frac{c_y^2 + c_z^2}{2RT_l}\right) dc_y dc_z}$$

$$+H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_r}\right)dc_y dc_z \tag{A.5}$$

式 (A.5) 右辺第 1 項の下線部の積分 I は以下の様に計算される。

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_y dc_z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c_y^2\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_y dc_z + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c_z^2\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_l}\right)dc_y dc_z \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}c_y^2\exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right)dc_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right)dc_z \\
&\quad +\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT_l}\right)dc_y\int_{-\infty}^{\infty}c_z^2\exp\left(-\frac{c_z^2}{2RT_l}\right)dc_z
\end{aligned}$$

積分公式 (A.2) で $n=2$ とした

$$\int_0^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2}\sqrt{\pi} \tag{A.6}$$

と、(A.3) より

$$I=\frac{1}{2}(2RT_l)^{3/2}\sqrt{\pi}\cdot(2RT_l)^{1/2}\sqrt{\pi}+(2RT_l)^{1/2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}(2RT_l)^{3/2}\sqrt{\pi}=(2RT_l)^2\pi \tag{A.7}$$

同様にして式 (A.5) 右辺第 2 項の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(c_y^2+c_z^2)\exp\left(-\frac{c_y^2+c_z^2}{2RT_r}\right)dc_y dc_z=(2RT_r)^2\pi \tag{A.8}$$

となる。

式 (A.7) と (A.8) より式 (A.5) は

$$\begin{aligned}
b_0(c_x,x) &= \{1-H(x)\}\frac{\rho_l}{(2\pi RT_l)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right)(2RT_l)^2\pi \\
&\quad +H(x)\frac{\rho_r}{(2\pi RT_r)^{3/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right)(2RT_r)^2\pi \\
&= \{1-H(x)\}\frac{2RT_l\rho_l}{(2\pi RT_l)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_l}\right)+H(x)\frac{2RT_r\rho_r}{(2\pi RT_r)^{1/2}}\exp\left(-\frac{c_x^2}{2RT_r}\right)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

付録 B. 積分公式 (1)

以下の積分公式において、a, x はパラメータで $a > 0, -\infty < x < \infty$、関数 $\mathrm{erfc}(y)$ は

$$\mathrm{erfc}(y) = 1 - \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^{\infty} e^{-t^2}dt \quad , \quad \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y} e^{-t^2}dt$$

である。

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \tag{B.1}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \tag{B.2}$$

$$\int_0^{\infty} y\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{x\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{a}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{B.3}$$

$$\int_{-\infty}^{0} y\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{x\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - \frac{a}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{B.4}$$

$$\int_0^{\infty} y^2\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{(a+2x^2)\sqrt{a\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{ax}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{B.5}$$

$$\int_{-\infty}^{0} y^2\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \frac{(a+2x^2)\sqrt{a\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) - \frac{ax}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{B.6}$$

● 公式 (B.1) の導出

変数変換

$$p = -\frac{x-y}{\sqrt{a}} \quad , \quad y = \sqrt{a}p + x \quad , \quad dy = \sqrt{a}dp \tag{B.7}$$

により

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\}dy = \int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-p^2}\sqrt{a}dp = \sqrt{a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-p^2}dp$$

$$= \frac{\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.8) = (B.1)$$

● 公式 (B.2) の導出

変数変換

$$q = \frac{x-y}{\sqrt{a}} \quad , \quad y = -\sqrt{a}q + x \quad , \quad dy = -\sqrt{a}dq \tag{B.9}$$

により

$$\int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2}(-\sqrt{a})dq = \sqrt{a}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-q^2}dp$$

$$= \frac{\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.10) = (B.2)$$

● 公式 (B.3) の導出

変数変換 (B.7) により

$$\int_{0}^{\infty} y \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} (\sqrt{a}p + x)e^{-p^2}\sqrt{a}dp$$

$$= a\int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} pe^{-p^2}dp + x\int_{-x/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-p^2}\sqrt{a}dp$$

右辺第 1 項に積分公式 (C.1) を適用し、右辺第 2 項の積分は式 (B.8) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\int_{0}^{\infty} y \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \frac{a}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.11) = (B.3)$$

● 公式 (B.4) の導出

変数変換 (B.9) により

$$\int_{-\infty}^{0} y \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} (-\sqrt{a}q + x)e^{-q^2}(-\sqrt{a})dq$$

$$= a\int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} qe^{-q^2}dq + x\int_{\infty}^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2}(-\sqrt{a})dq$$

右辺第 1 項に積分公式 (C.2) を適用し、右辺第 2 項の積分は式 (B.10) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\int_{-\infty}^{0} y \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = -\frac{a}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.12) = (B.4)$$

● 公式 (B.5) の導出

変数変換 (B.7) により

$$\int_0^\infty y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty (\sqrt{a}p + x)^2 e^{-p^2} \sqrt{a} dp$$

$$= \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty (ap^2 + 2\sqrt{a}px + x^2) e^{-p^2} \sqrt{a} dp$$

$$= a^{3/2} \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp + 2ax \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp + x^2 \int_{-x/\sqrt{a}}^\infty e^{-p^2} \sqrt{a} dp$$

右辺第 1,2 項の積分に積分公式 (C.3),(C.1) を適用し、右辺第 3 項の積分は式 (B.8) 第 2 番目の積分であることに注意すれば

$$\int_0^\infty y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = a^{3/2} \left[-\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$+ \quad 2ax \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)\right] + x^2 \left[\frac{\sqrt{a\pi}}{2} \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$= \frac{ax}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{(a+2x^2)\sqrt{a\pi}}{4} \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.13) = (B.5)$$

● 公式 (B.6) の導出

変数変換 (B.9) により

$$\int_{-\infty}^0 y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = \int_\infty^{x/\sqrt{a}} (-\sqrt{a}q + x)^2 e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq$$

$$= \int_\infty^{x/\sqrt{a}} (aq^2 - 2\sqrt{a}qx + x^2) e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq$$

$$= -a^{3/2} \int_\infty^{x/\sqrt{a}} q^2 e^{-q^2} dq + 2ax \int_\infty^{x/\sqrt{a}} q e^{-q^2} dq + x^2 \int_\infty^{x/\sqrt{a}} e^{-q^2} (-\sqrt{a}) dq$$

右辺第 1,2 項の積分に積分公式 (C.4),(C.2) を適用し、右辺第 3 項の積分は式 (B.10) 第 2 番

目の積分であることに注意すれば

$$\int_0^{\infty} y^2 \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{a}\right\} dy = -a^{3/2}\left[-\frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$+ \quad 2ax\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)\right] + x^2\left[\frac{\sqrt{a\pi}}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]$$

$$= \quad -\frac{ax}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{(a+2x^2)\sqrt{a\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (B.14) = (B.6)$$

付録 C. 積分公式 (2)

以下の積分公式において、a, x はパラメータで $a > 0, -\infty < x < \infty$、関数 $\mathrm{erfc}(y)$ は

$$\mathrm{erfc}(y) = 1 - \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty e^{-t^2} dt \quad , \quad \mathrm{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt$$

である。

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{C.1}$$

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \tag{C.2}$$

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \tag{C.3}$$

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} \infty p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \tag{C.4}$$

• 公式 (C.1) の導出

変数変換

$$p^2 = t \quad , \quad p = \sqrt{t} \quad , \quad 2pdp = dt \tag{C.5}$$

により

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p e^{-p^2} dp = \int_{x^2/a}^\infty e^{-t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \left[-e^{-t}\right]_{x^2/a}^\infty = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \qquad (C.6) = (C.1)$$

• 公式 (C.2) の導出

式 (C.1) で積分の上下限を入れ換えて

$$\int_\infty^{-x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)$$

$x \to -x$ とすれば

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) \qquad (C.7) = (C.2)$$

• 公式 (C.3) の導出

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp = \int_{-x/\sqrt{a}}^0 p^2 e^{-p^2} dp + \int_0^\infty p^2 e^{-p^2} dp \tag{C.8}$$

(C.8) 右辺第 2 項の積分は、付録 A の積分公式 (A.2) より

$$\int_0^\infty p^2 e^{-p^2} dp = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad (C.9)$$

(C.8) 右辺第 1 項の積分は

$$\frac{d}{dp}e^{-p^2} = -2pe^{-p^2} \quad \text{より} \quad pe^{-p^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dp}e^{-p^2}$$

に注意して部分積分する。

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^0 p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2}\int_{-x/\sqrt{a}}^0 p\frac{d}{dp}e^{-p^2} dp = -\frac{1}{2}\left\{\left[pe^{-p^2}\right]_{-x/\sqrt{a}}^0 - \int_{-x/\sqrt{a}}^0 e^{-p^2} dp\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\left\{-\frac{x}{\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)\right\} + \int_0^{-x/\sqrt{a}} e^{-p^2} dp\right]$$

$$= -\frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (C.10)$$

式 (C.9),(C.10) を式 (C.8) に代入して

$$\int_{-x/\sqrt{a}}^\infty p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$= -\frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (C.11) = (C.3)$$

● 公式 (C.4) の導出

式 (C.3) で積分の上下限を入れ換えて

$$\int_\infty^{-x/\sqrt{a}} p^2 e^{-p^2} dp = \frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$$

$x \to -x$ とすれば

$$\int_\infty^{x/\sqrt{a}} p^2 e^{-p^2} dp = -\frac{x}{2\sqrt{a}}\exp\left(-\frac{x^2}{a}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \qquad (C.12) = (C.4)$$