一様流中に置かれた簡単な凸形状物体に作用する力と物体への伝熱量 (自由分子流条件が成立する場合)

目　　次

主要な記号

U	:	一様流速 (m/s)
T	:	一様流温度 (K)
n	:	一様流分子数密度 (m^{-3})
R	:	単位質量あたり気体定数 (J/(kgK))
$S = U/\sqrt{2RT}$	:	無次元化された一様流速
T_W	:	物体表面温度 (K)
$I_0(x), I_1(x)$	:	0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数

1. はじめに

一様気体流中に置かれた簡単な形状の物体 B に作用する力および気体から物体 B への伝熱量を求める [1,2,3,4]。一様流中の気体分子の平均自由行程 λ は物体 B の代表長 L より十分大きく、クヌーセン数 $K_n = \lambda/L$ が $K_n > 100$ となる自由分子流条件が成立しているとする。また、物体形状は物体からの反射分子が再度物体に衝突することのない凸形状物体とする。

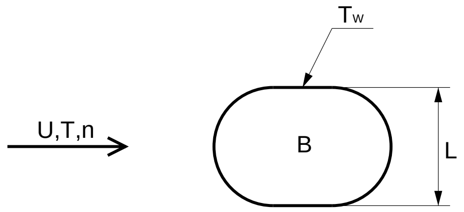

図 1.1 一様流中に置かれた物体

一様流の流速を U(m/s), 温度を T(K), 分子数密度を n(m^{-3})、物体 B の表面温度を T_W(K) とする。

2. 物体表面上の微小面素 dA に単位時間に入射する分子数

流速 U(m/s) の平衡一様流中に置かれた物体表面上の微小面素 dA(m^2) に単位時間に入射する分子数 dN_i(1/s) を求める。

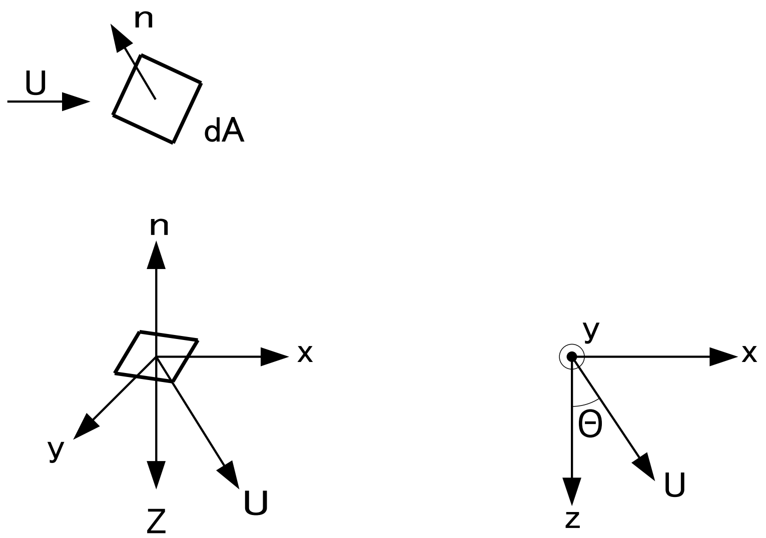

図 2.1 物体表面上の微小面素 dA に設定した座標系

物体表面上の微小面素 dA の物体外部に向けて立てた単位法線を $\boldsymbol{n}$ とする。$-\boldsymbol{n}$ と平行に z 軸をとり、$-\boldsymbol{n}$ の向き (物体内部向き) を z 軸正の向き、$-\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{U}$ と平行に y 軸をとり、

$-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U}$ の向きを y 軸正の向き、この y,z 軸と右手系を作るように x 軸をとる。この設定によれば一様流の速度ベクトル $\boldsymbol{U}$ は xz 面内に含まれる。z 軸と $\boldsymbol{U}$ のなす角を θ とする。

この座標系における分子の速度分布関数は

$$f(\boldsymbol{c}) = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(c_x-U\sin\theta)^2+c_y^2+(c_z-U\cos\theta)^2}{2RT}\right] \tag{2.1}$$

と表される。ここで、c_x, c_y, c_z はそれぞれ分子運動速度ベクトルの x, y, z 成分 (m/s)、n は分子数密度 (1/m^3)、T は一様流の温度 (K)、R は単位質量当り気体定数 (J/Kkg) である。

このとき、微小面素 dA に単位時間に入射する分子数 dN_i は

$$\begin{aligned} dN_i &= dA\int_{-\infty}^{\infty}dc_x\int_{-\infty}^{\infty}dc_y\int_0^{\infty}c_z f dc_z \\ &= \frac{ndA}{(2\pi RT)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{(c_x-U\sin\theta)^2}{2RT}\right\}\exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} \\ &\quad\times c_z\exp\left\{-\frac{(c_z-U\cos\theta)^2}{2RT}\right\}dc_x dc_y dc_z = \frac{ndA}{(2\pi RT)^{3/2}}I \end{aligned} \tag{2.2}$$

と表される。ここで

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(c_x-U\sin\theta)^2}{2RT}\right\}dc_x\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\}dc_y\int_0^{\infty}c_z\exp\left\{-\frac{(c_z-U\cos\theta)^2}{2RT}\right\}dc_z$$

と置いた。I は下記の 3 個の積分 I_1, I_2, I_3 の積となる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(c_x-U\sin\theta)^2}{2RT}\right\}dc_x \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\}dc_y \\ I_3 &= \int_0^{\infty}c_z\exp\left\{-\frac{(c_z-U\cos\theta)^2}{2RT}\right\}dc_z \\ I &= I_1 I_2 I_3 \end{aligned}$$

I_1, I_2 は、積分公式 A.2

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}x^n e^{-ax^2}dx &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (a>0) \quad (n=0,2,4\cdots) \\ &= 0 \quad (a>0) \quad (n=1,3,5\cdots) \end{aligned}$$

において、$n = 0, a = 1/2RT$ として

$$I_1 = I_2 = (2RT)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (2RT)^{1/2}\sqrt{\pi} \tag{2.3}$$

I_3 は、積分公式 A.7

$$\int_0^\infty x \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a}{2}\left[e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]$$

において、$a = 2RT, b = U\cos\theta$ とし、さらに

$$S = \frac{U}{\sqrt{2RT}} \quad , \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = S\cos\theta \tag{2.4}$$

と置いて

$$I_3 = RT\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \tag{2.5}$$

式 (2.3),(2.5) より、

$$\begin{aligned} I &= I_1 I_2 I_3 = (2RT)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\cdot(2RT)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}RT\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\ &= 2(RT)^2\pi\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

この式 (2.6) を式 (2.2) に代入して

$$\begin{aligned} dN_i &= \frac{ndA}{(2\pi RT)^{3/2}} I = \frac{ndA}{(2\pi RT)^{3/2}} 2(RT)^2\pi\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\ &= n\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] dA \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. 物体表面上の微小面素 dA に作用する力

流速 U(m/s) の平衡一様流中に置かれた物体表面上の微小面素 dA(m^2) に作用する力 (N) を求める。

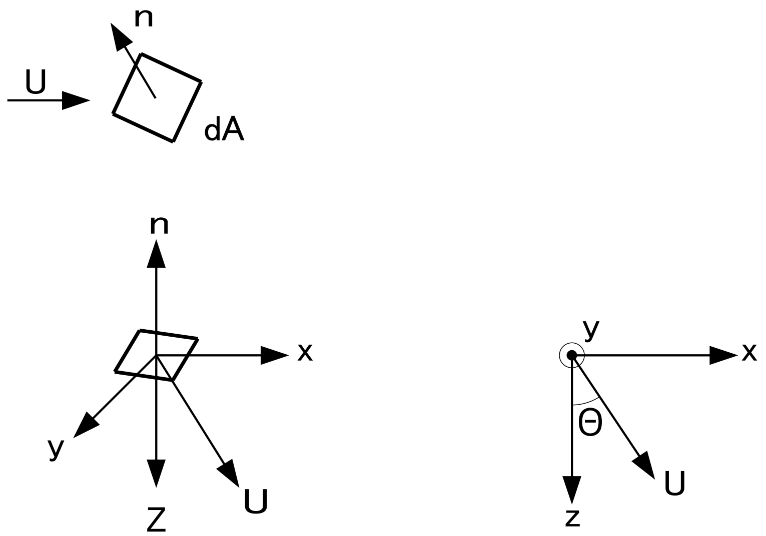

図 3.1 物体表面上の微小面素 dA に設定した座標系

物体表面上の微小面素 dA の物体外部に向けて立てた単位法線を $\boldsymbol{n}$ とする。$-\boldsymbol{n}$ と平行に z 軸をとり、$-\boldsymbol{n}$ の向き (物体内部向き) を z 軸正の向き、$-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U}$ と平行に y 軸をとり、$-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U}$ の向きを y 軸正の向き、この y,z 軸と右手系を作るように x 軸をとる。この設定によれば一様流の速度ベクトル $\boldsymbol{U}$ は xz 面内に含まれる。z 軸と $\boldsymbol{U}$ のなす角を θ とする。

この座標系における分子の速度分布関数は

$$f(\boldsymbol{c}) = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2 + c_y^2 + (c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right] \tag{3.1}$$

と表される。ここで、c_x, c_y, c_z はそれぞれ分子運動速度ベクトルの x,y,z 成分 (m/s)、n は分子数密度 (1/m^3)、T は一様流の温度 (K)、R は単位質量当り気体定数 (J/Kkg) である。

3.1 微小面素 dA の法線方向 z 軸正の向きに作用する力 dp

● 微小面素 dA に入射する分子により単位時間に輸送される法線方向 z 軸正の向きの運動量 dp_i は

$$dp_i \;=\; dA \int_{-\infty}^{\infty} dc_x \int_{-\infty}^{\infty} dc_y \int_{0}^{\infty} c_z (mc_z) f(\boldsymbol{c}) dc_z$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{nmdA}{(2\pi RT)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} \\
&\times c_z^2 \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x dc_y dc_z = \frac{nmdA}{(2\pi RT)^{3/2}} I \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

と表される。ここで、

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} dc_y \\
&\times \int_{0}^{\infty} c_z^2 \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_z
\end{aligned}
$$

と置いた。I は下記の 3 個の積分 I_1, I_2, I_3 の積となる。

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} dc_y \\
I_3 &= \int_{0}^{\infty} c_z^2 \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_z \\
I &= I_1 I_2 I_3
\end{aligned}
$$

I_1, I_2 は、積分公式 A.2

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (a>0) \quad (n = 0, 2, 4 \cdots) \\
&= 0 \quad (a>0) \quad (n = 1, 3, 5 \cdots)
\end{aligned}
$$

において、$n = 0, a = 1/2RT$ として

$$
I_1 = I_2 = (2RT)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (2RT)^{1/2}\sqrt{\pi} \qquad (3.3)
$$

I_3 は、積分公式 A.8

$$
\int_0^{\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a^{3/2}}{2}\left[\frac{b}{\sqrt{a}} e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]
$$

において $a = 2RT, b = U\cos\theta$ とし、さらに

$$
S = \frac{U}{\sqrt{2RT}} \quad , \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = S\cos\theta \qquad (3.4)
$$

と置いて

$$I_3 = \frac{(2RT)^{3/2}}{2}\left[S\cos\theta e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2\right\}\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \tag{3.5}$$

式 (3.3),(3.5) より

$$I = I_1 I_2 I_3 = \frac{(2RT)^{5/2}\pi}{2}\left[S\cos\theta e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2\right\}\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \tag{3.6}$$

式 (3.6) を式 (3.2) に代入して

$$dp_i = \frac{nmRT}{\sqrt{\pi}}\left[S\cos\theta e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2\right\}\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \tag{3.7}$$

• 微小面素 dA から反射する分子により単位時間に輸送される法線方向 z 軸負の向きの運動量 dp_r を求める。

反射分子は拡散反射則に従うと仮定すれば、反射分子の速度分布関数は温度が固体壁温度 T_W 分子数密度が n_W である仮想された静止平衡気体の速度分布関数

$$f(\boldsymbol{c}) = \frac{n_W}{(2\pi RT_W)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_W}\right) \tag{3.8}$$

となる。反射分子により単位時間に輸送される z 軸負の向きへの運動量 dp_r は、式 (3.7) において $n = n_W, T = T_W, S = 0$ として

$$dp_r = \frac{n_W mRT_W dA}{2} \tag{3.9}$$

となる。ここで仮想された気体の分子数密度 n_W は以下のように決定される。

微小面素 dA から単位時間に反射される分子数 (仮想された静止平衡気体から微小面素 dA を介して放出される分子数)N_W は、

$$N_W = \frac{1}{4}n_W\bar{c}dA = \frac{1}{4}n_W\sqrt{\frac{8RT_W}{\pi}}dA$$

と表される (ここで $\bar{c} = \sqrt{8RT_W/\pi}$ は仮想された気体分子の平均速度)。この N_W は微小面素 dA に単位時間当り入射数をする分子数 (式 (2.7))

$$dN_i = n\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA$$

と等しくなければならない。すなわち、

$$\frac{1}{4}n_W\sqrt{\frac{8RT_W}{\pi}}dA = n\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA$$

でなければならない。これを n_W について解いて

$$n_W = n\sqrt{\frac{T}{T_W}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \tag{3.10}$$

これを式 (3.9) に代入すれば

$$\begin{aligned} dp_r &= \frac{mRT_W dA}{2} n\sqrt{\frac{T}{T_W}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \\ &= \frac{1}{2}nmR\sqrt{TT_W}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \end{aligned} \tag{3.11}$$

を得る。

• 微小面素 dA に入射する分子の法線方向運動量の単位時間当りの変化量 $dp_i + dp_r$ が、微小面素 dA の法線方向に作用する力 dp(N) となる。式 (3.7)(3.11) より

$$\begin{aligned} dp &= dp_i + dp_r \\ &= \frac{nmRT}{\sqrt{\pi}}\left[S\cos\theta e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \\ &\quad + \frac{nmR\sqrt{TT_W}}{2}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \\ &= nmRT\left[\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\cos\theta)^2} + \left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \\ &\quad + nmRT\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}e^{-(S\cos\theta)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \\ &= nmRT\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right. \\ &\quad \left. + \left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2 微小面素 dA の接線方向 x 軸正の向きに作用する力 dt

• 微小面素 dA に入射する分子により単位時間に輸送される接線方向 x 軸正の向きの運動量 dt_i は

$$dt_i = dA\int_{-\infty}^{\infty}dc_x\int_{-\infty}^{\infty}dc_y\int_0^{\infty}c_z(mc_x)f(\boldsymbol{c})dc_z$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{nmdA}{(2\pi RT)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} \\
&\times c_z c_x \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x dc_y dc_z = \frac{nmdA}{(2\pi RT)^{3/2}} I
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

と表される。ここで

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} c_x \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} dc_y \\
&\times \int_{0}^{\infty} c_z \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_z
\end{aligned}
$$

と置いた。I は下記の 3 個の積分 I_1, I_2, I_3 の積となる

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} c_x \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} dc_y \\
I_3 &= \int_{0}^{\infty} c_z \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_z \\
I &= I_1 I_2 I_3
\end{aligned}
$$

I_1 は積分公式 A.10

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = b\sqrt{a\pi}
$$

において $a = 2RT, b = U\sin\theta$ として

$$
I_1 = U\sin\theta\sqrt{2RT}\sqrt{\pi} \tag{3.14}
$$

I_2 は積分公式 A.2

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (a > 0) \quad (n = 0, 2, 4\cdots) \\
&= 0 \quad (a > 0) \quad (n = 1, 3, 5\cdots)
\end{aligned}
$$

において、$n = 0, a = 1/2RT$ として

$$
I_2 = (2RT)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (2RT)^{1/2}\sqrt{\pi} \tag{3.15}
$$

I_3 は積分公式 A.7

$$\int_0^\infty x \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a}{2}\left[e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]$$

において $a = 2RT, b = U\cos\theta$ とし、さらに

$$S = \frac{U}{\sqrt{2RT}} \quad , \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = S\cos\theta \tag{3.16}$$

と置いて

$$I_3 = RT\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right] \tag{3.17}$$

式 (3.14)(3.15)(3.17) より

$$I = I_1 I_2 I_3 = U\sin\theta\pi(2RT)\cdot RT\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right] \tag{3.18}$$

式 (3.18) を式 (3.13) に代入して dt_i は

$$\begin{aligned} dt_i &= \frac{nmdA}{(2\pi RT)^{3/2}}U\sin\theta\pi(2RT)\cdot RT\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right] \\ &= \frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right]dA \end{aligned} \tag{3.19}$$

• 微小面素 dA に入射後反射した分子により単位時間に輸送される x 軸方向の運動量は、反射分子が拡散反射則に従うときは反射分子の運動方向が等方的になるため打ち消しあいゼロとなる。

以上より、微小面素 dA の接線方向 x 軸正の向きに作用する力

$$dt = dt_i = \frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right]dA \tag{3.20}$$

を得る。

4. 物体表面上の微小面素 dA に単位時間に伝達する熱量

流速 U(m/s) の平衡一様流中に置かれた物体表面上の微小面素 dA(m^2) に単位時間に伝達する熱量 dQ(J/s) を求める。

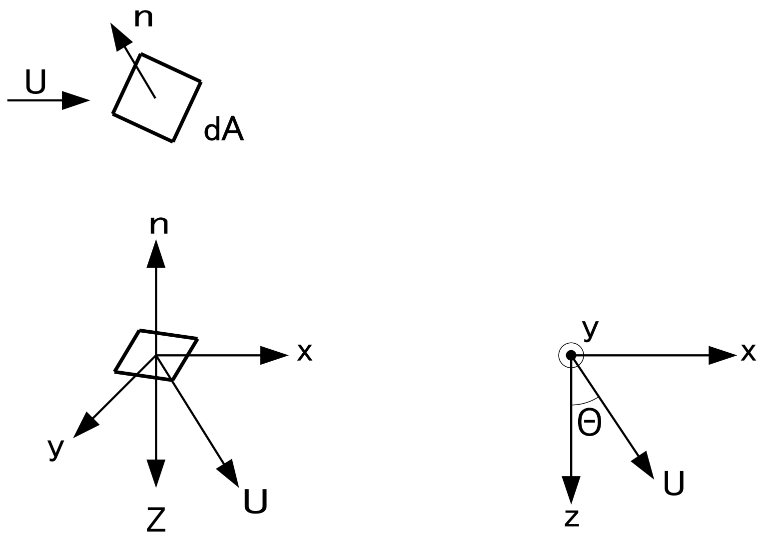

図 4.1 物体表面上の微小面素 dA に設定した座標系

物体表面上の微小面素 dA の物体外部に向けて立てた単位法線を $\boldsymbol{n}$ とする。$-\boldsymbol{n}$ と平行に z 軸をとり、$-\boldsymbol{n}$ の向き (物体内部向き) を z 軸正の向き、$-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U}$ と平行に y 軸をとり、$-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{U}$ の向きを y 軸正の向き、この y,z 軸と右手系を作るように x 軸をとる。この設定によれば一様流の速度ベクトル $\boldsymbol{U}$ は xz 面内に含まれる。z 軸と $\boldsymbol{U}$ のなす角を θ とする。

この座標系における分子の速度分布関数は

$$f(\boldsymbol{c}) = \frac{n}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2 + c_y^2 + (c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right] \tag{4.1}$$

と表される。ここで、c_x, c_y, c_z はそれぞれ分子運動速度ベクトルの x,y,z 成分 (m/s)、n は分子数密度 (1/m^3)、T は一様流の温度 (K)、R は単位質量当り気体定数 (J/Kkg) である。

● 微小面素 dA に入射する分子により単位時間に微小面素 dA に伝達する熱量 dE_i は、分子が内部自由度を持たない場合は

$$dE_i \quad = \quad dA\int_{-\infty}^{\infty} dc_x \int_{-\infty}^{\infty} dc_y \int_0^{\infty} \frac{1}{2} mc^2 c_z f dc_z$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{nmdA}{2(2\pi RT)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} \\
&\times c_z(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)\exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x dc_y dc_z = \frac{nmdA}{2(2\pi RT)^{3/2}} I \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

と表される。ここで

$$
\begin{aligned}
F_1(c_x) &= \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\}, \quad F_2(c_y) = \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT}\right) \\
F_3(c_z) &= \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

とおけば

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} c_x^2 c_z F_1(c_x)F_2(c_y)F_3(c_z) dc_x dc_y dc_z \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} c_y^2 c_z F_1(c_x)F_2(c_y)F_3(c_z) dc_x dc_y dc_z \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} c_z^3 F_1(c_x)F_2(c_y)F_3(c_z) dc_x dc_y dc_z = I_1 + I_2 + I_3 \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

I_1, I_2, I_3 は

$$
I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 F_1(c_x)dc_x \int_{-\infty}^{\infty} F_2(c_y)dc_y \int_{0}^{\infty} c_z F_3(c_z)dc_z = I_{11}I_{12}I_{13} \qquad (4.5)
$$

$$
I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(c_x)dc_x \int_{-\infty}^{\infty} c_y^2 F_2(c_y)dc_y \int_{0}^{\infty} c_z F_3(c_z)dc_z = I_{21}I_{22}I_{23} \qquad (4.6)
$$

$$
I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(c_x)dc_x \int_{-\infty}^{\infty} F_2(c_y)dc_y \int_{0}^{\infty} c_z^3 F_3(c_z)dc_x = I_{31}I_{32}I_{33} \qquad (4.7)
$$

である。

• 積分 I_1 の計算

I_1 の第 1 因子

$$
I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 F_1(c_x)dc_x = \int_{-\infty}^{\infty} c_x^2 \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x
$$

は、積分公式 A.11

$$
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a^{3/2}}{2}\sqrt{\pi} + b^2\sqrt{a}\sqrt{\pi}
$$

で $a = 2RT, b = U\sin\theta$ として

$$I_{11} = \frac{(2RT)^{3/2}}{2}\sqrt{\pi} + U^2\sin^2\theta(2RT)^{1/2}\sqrt{\pi} \tag{4.8}$$

I_1 の第 2 因子は積分公式 A.2 より

$$I_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(c_y)dc_y = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT}\right)dc_y = (2RT)^{1/2}\sqrt{\pi} \tag{4.9}$$

I_1 の第 3 因子

$$I_{13} = \int_0^{\infty} c_z\exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\}dc_z$$

は積分公式 A.7

$$\int_0^{\infty} x\exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\}dx = \frac{a}{2}\left[e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]$$

で $a = 2RT, b = U\cos\theta$ として

$$I_{13} = RT\left[\exp\left(-\frac{U^2\cos^2\theta}{2RT}\right) + \frac{\sqrt{\pi}U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\right)\right\}\right] \tag{4.10}$$

式 (4.8),(4.9),(4.10) を式 (4.5) に代入して

$$I_1 = I_{11}I_{12}I_{13} = \left[\frac{(2RT)^{3/2}\sqrt{\pi}}{2} + U^2\sin^2\theta(2RT)^{1/2}\sqrt{\pi}\right](2RT)^{1/2}\sqrt{\pi}$$

$$\times RT\left[\exp\left(-\frac{U^2\cos^2\theta}{2RT}\right) + \frac{\sqrt{\pi}U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\right)\right\}\right]$$

ここで

$$S = \frac{U}{\sqrt{2RT}} \tag{4.11}$$

とおけば

$$I_1 = \left[\frac{(2RT)^{3/2}\sqrt{\pi}}{2} + S^2\sin^2\theta(2RT)^{3/2}\sqrt{\pi}\right](2RT)^{1/2}\sqrt{\pi}$$

$$\times RT\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right]$$

となって

$$I_1 = 4(RT)^3\pi\left(\frac{1}{2} + S^2\sin^2\theta\right)\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right] \tag{4.12}$$

• 積分 I_2 の計算

I_2 の第 1 因子は積分公式 A.2 より

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(c_x)dc_x = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\}dc_x = \sqrt{\pi}\sqrt{2RT} \tag{4.13}$$

I_2 の第 2 因子も積分公式 A.2 より

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} c_y^2 \exp\left(-\frac{c_y^2}{2RT}\right) dc_y = (2RT)^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = (2RT)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.14}$$

I_2 の第 3 因子は積分 I_{13} と等しく

$$\begin{aligned} I_{23} = I_{13} &= RT\left[\exp\left(-\frac{U^2\cos^2\theta}{2RT}\right) + \frac{\sqrt{\pi}U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\right)\right\}\right] \\ &= RT\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \end{aligned} \tag{4.15}$$

式 (4.13),(4.14),(4.15) を式 (4.6) に代入して

$$I_2 = I_{21}I_{22}I_{23} = \sqrt{\pi}(2RT)^{1/2}(2RT)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}RT\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]$$

となり

$$I_2 = 2(RT)^3\pi\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \tag{4.16}$$

• 積分 I_3 の計算

I_3 の第 1 因子は積分公式 A.2 より

$$I_{31} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(c_x)dc_x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(c_x - U\sin\theta)^2}{2RT}\right\} dc_x = \sqrt{\pi}\sqrt{2RT} \tag{4.17}$$

I_3 の第 2 因子も積分公式 A.2 より

$$I_{32} = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(c_y)dc_y = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{c_y^2}{2RT}\right\} dc_y = \sqrt{\pi}\sqrt{2RT} \tag{4.18}$$

I_3 の第 3 因子

$$I_{33} = \int_0^{\infty} c_z^3 F_3(c_z)dc_z = \int_0^{\infty} c_z^3 \exp\left\{-\frac{(c_z - U\cos\theta)^2}{2RT}\right\} dc_z$$

は、積分公式 A.9

$$\int_0^{\infty} x^3 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a}{2}(a + b^2)e^{-b^2/a} + \frac{\sqrt{a}b\sqrt{\pi}(3a + 2b^2)}{4}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}$$

で $a = 2RT, b = U\cos\theta$ として

$$\begin{aligned} I_{33} &= \frac{2RT}{2}(2RT + U^2\cos^2\theta)e^{-U^2\cos^2\theta/2RT} \\ &\quad + \frac{\sqrt{2RT}U\cos\theta\sqrt{\pi}(6RT + 2U^2\cos^2\theta)}{4}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\right)\right\} \\ &= 2(RT)^2\left(1 + \frac{U^2\cos^2\theta}{2RT}\right)e^{-U^2\cos^2\theta/2RT} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}U\cos\theta\sqrt{2RT}2RT\left(3 + \frac{2U^2}{2RT}\cos^2\theta\right)\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{U\cos\theta}{\sqrt{2RT}}\right)\right\} \end{aligned}$$

ここで式 (4.11)($S = U/\sqrt{2RT}$) を用いれば

$$
\begin{aligned}
& I_{33} \\
= \;& 2(RT)^2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \frac{\sqrt{\pi}(2RT)^2}{4}S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\} \\
= \;& 2(RT)^2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}(RT)^2 S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\} \\
= \;& (RT)^2\left[2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

式 (4.17),(4.18),(4.19) を式 (4.7) に代入して

$$
\begin{aligned}
I_3 \;=\;& I_{31}I_{32}I_{33} = (\sqrt{\pi}\sqrt{2RT})(\sqrt{\pi}\sqrt{2RT}) \\
& \times(RT)^2\left[2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\
=\;& 2\pi(RT)^3\left[2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

• 式 (4.12),(4.16),(4.20) を式 (4.4) に代入して

$$
\begin{aligned}
I \;=\;& I_1 + I_2 + I_3 \\
=\;& 4(RT)^3\pi\left(\frac{1}{2}+S^2\sin^2\theta\right)\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right] \\
& +2(RT)^3\pi\left[e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] \\
& +2\pi(RT)^3\left[2\left(1+S^2\cos^2\theta\right)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta(3+2S^2\cos^2\theta)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\
=\;& 2\pi(RT)^3\left[\left\{1+2S^2\sin^2\theta+1+2(1+S^2\cos^2\theta)\right\}e^{-S^2\cos^2\theta}\right. \\
& \left.+\sqrt{\pi}S\cos\theta\left(1+2S^2\sin^2\theta+1+3+2S^2\cos^2\theta\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\
=\;& 2\pi(RT)^3\left[(4+2S^2)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta(5+2S^2)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \\
=\;& 4\pi(RT)^3\left[(S^2+2)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\left(S^2+\frac{5}{2}\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right] \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

式 (4.21) を式 (4.2) に代入して

$$
\begin{aligned}
dE_i &= \frac{nmdA}{2(2\pi RT)^{3/2}} 4\pi (RT)^3 \left[(S^2+2)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi} S\cos\theta \left(S^2 + \frac{5}{2} \right) \{1 + \mathrm{erf}\,(S\cos\theta)\} \right] \\
&= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[(S^2+2)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi} \left(S^2 + \frac{5}{2} \right) S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}\,(S\cos\theta)\} \right] dA \quad (4.22)
\end{aligned}
$$

• 微小面素 dA から反射する分子により単位時間に微小面素 dA から気体に伝達される熱量 dE_r を求める。

反射分子は拡散反射則に従うと仮定すれば、反射分子の速度分布関数は温度が固体壁温度 T_W 分子数密度が n_W である仮想された静止平衡気体の速度分布関数

$$
f(\boldsymbol{c}) = \frac{n_W}{(2\pi RT_W)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2RT_W} \right) \qquad (4.23)
$$

となる。dE_r は、式 (4.22) において $n = n_W, T = T_W, S = 0$ として

$$
dE_r = n_W mRT_W \sqrt{\frac{RT_W}{2\pi}}\,[2]\,dA
$$

n_W に式 (3.10) の結果を代入すれば

$$
\begin{aligned}
dE_r &= n\sqrt{\frac{T}{T_W}} \left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi} S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\} \right] mRT_W \sqrt{\frac{RT_W}{2\pi}} 2dA \\
&= nmR \left(\frac{T}{T_W} \right)^{1/2} \left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi} S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\} \right] \frac{T_W}{T} T \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left(\frac{T_W}{T} \right)^{1/2} 2dA \\
&= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left(2\frac{T_W}{T} \right) \left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi} S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\} \right] dA \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

• 単位時間に気体から微小面素 dA に伝達する熱量 dQ は、分子が内部自由度を持たない場合は

$$
\begin{aligned}
dQ &= dE_i - dE_r \\
&= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[(S^2+2)e^{-S^2\cos^2\theta} + \sqrt{\pi} \left(S^2 + \frac{5}{2} \right) S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}\,(S\cos\theta)\} \right] dA \\
&\quad - nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left(2\frac{T_W}{T} \right) \left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi} S\cos\theta \{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\} \right] dA
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+2-2\frac{T_W}{T}\right)e^{-S^2\cos^2\theta}\right. \\
&\qquad \left. +\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right]dA \\
&= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)e^{-S^2\cos^2\theta}\right. \\
&\qquad \left. +\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right]dA
\end{aligned}
$$

整理して

$$
\begin{aligned}
dQ &= nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\cos^2\theta}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right\}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}e^{-S^2\cos^2\theta}\right]dA \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

特に静止気体中では $S=0$ として

$$
dQ = nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)-\frac{1}{2}\right]dA = 2nmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left(1-\frac{T_W}{T}\right)dA \qquad (4.26)
$$

5. 平板の抗力と揚力

流速 U(m/s), 温度 T(K), 分子数密度 n(m^{-3}) の一様流中に、迎角 α で置かれた面積 A(m^2), 表面温度 T_W(K) の平板 (形は任意) に作用する抗力 D(N) と揚力 L(N) を求める。

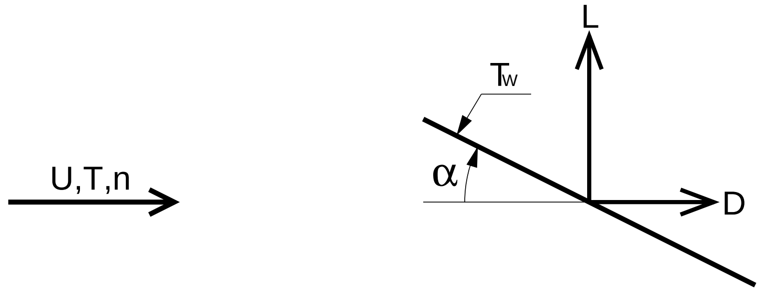

図 5.1 一様流中に置かれた平板の抗力と揚力

5.1 抗力

• 前面 (一様流と対向する側の面) に作用する抗力 D_F

前面上の微小面素 dA に図 3.1 と同様な座標系を設定する。

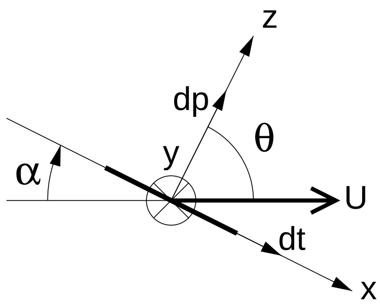

図 5.2 前面上の微小面素 dA に設定した座標系

前面上の微小面素 dA に作用する抗力 (一様流方向の力)dD_F は

$$dD_F = dp\sin\alpha + dt\cos\alpha$$

ここで dp は微小面素 dA に作用する平板垂直方向 z 軸正の向きの力、dt は微小面素 dA に作用する平板面内 x 軸正の向きの力である。dp, dt は、それぞれ式 (3.12),(3.20) に求められており、これらを代入すれば

$$\begin{aligned} dD_F &= nmRT\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right. \\ &\quad \left. + \left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] dA\sin\alpha \\ &\quad + \frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right] dA\cos\alpha \end{aligned}$$

$\theta = (\pi/2) - \alpha$ に注意して前面全体に関して積分すれば、前面に作用する抗力 D_F は

$$\begin{aligned}
D_F &= AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right. \\
&\quad \left. + \left\{\frac{1}{2} + (S\sin\alpha)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha \\
&\quad + AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2} + S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

● 後面に作用する抗力 D_B

後面上の微小面素 dA に図 3.1 と同様な座標系を設定する。

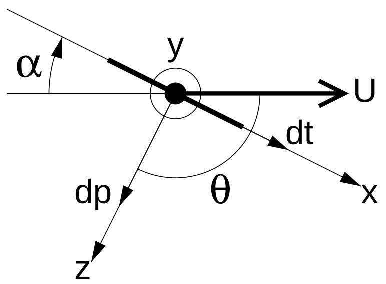

図 5.3 後面上の微小面素 dA に設定した座標系

後面上の微小面素 dA に作用する抗力 (一様流方向の力)dD_B は

$$dD_F = -dp\sin\alpha + dt\cos\alpha$$

ここで dp は微小面素 dA に作用する平板垂直方向 z 軸正の向きの力、dt は微小面素 dA に作用する平板面内 x 軸正の向きの力である。dp, dt は、それぞれ式 (3.12),(3.20) に求められており、これらを代入すれば

$$\begin{aligned}
dD_B &= -nmRT\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right. \\
&\quad \left. + \left\{\frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\sin\alpha \\
&\quad + \frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2} + \sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\cos\alpha
\end{aligned}$$

$\theta = (\pi/2) + \alpha$ に注意して後面全体に関して積分すれば、後面に作用する抗力 D_B は

$$D_B = AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}-(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\Bigg]\sin\alpha$$

$$+AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}-S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha \qquad (5.2)$$

- 平板に作用する抗力 D

平板に作用する抗力 D は

$$\begin{aligned}
D &= D_F+D_B\\
&= AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.\\
&\quad \left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha\\
&\quad +AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha\\
&\quad +AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.\\
&\quad \left.+\left\{-\frac{1}{2}-(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha\\
&\quad +AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}-S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha\\
&= AnmRT\left[\frac{2S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha+(1+2S^2\sin^2\alpha)\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\right]\sin\alpha\\
&\quad +AnmRT\left[\frac{2S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+2S^2\cos\alpha\sin\alpha\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\right]\cos\alpha
\end{aligned}$$

整理して

$$D=AnmRT\left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin^2\alpha+(1+2S^2)\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\sin\alpha\right] \qquad (5.3)$$

5.2 揚力

- 前面 (一様流と対向する側の面) に作用する揚力 L_F

図 5.2 を参照して、前面上の微小面素 dA に作用する揚力 (一様流に垂直方向の力)dL_F は

$$dL_F=dp\cos\alpha-dt\sin\alpha$$

ここで dp は微小面素 dA に作用する平板垂直方向 z 軸正の向きの力、dt は微小面素 dA に作用する平板面内 x 軸正の向きの力である。dp, dt は、それぞれ式 (3.12),(3.20) に求められており、これらを代入すれば

$$
\begin{aligned}
dL_F &= nmRT\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\cos\theta)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\cos\alpha\\
&\qquad-\frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\sin\alpha
\end{aligned}
$$

$\theta=(\pi/2)-\alpha$ に注意して前面全体に関して積分すれば、前面に作用する揚力 L_F は

$$
\begin{aligned}
L_F &= AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha\\
&\qquad-AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

● 後面に作用する揚力 L_B

図 5.3 を参照して、後面上の微小面素 dA に作用する揚力 dL_B は

$$
dL_F = -dp\cos\alpha - dt\sin\alpha
$$

ここで dp は微小面素 dA に作用する平板垂直方向 z 軸正の向きの力、dt は微小面素 dA に作用する平板面内 x 軸正の向きの力である。dp, dt は、それぞれ式 (3.12),(3.20) に求められており、これらを代入すれば

$$
\begin{aligned}
dL_B &= -nmRT\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\cos\theta)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\cos\alpha\\
&\qquad-\frac{nmRTS\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-(S\cos\theta)^2}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]dA\sin\alpha
\end{aligned}
$$

$\theta=(\pi/2)+\alpha$ に注意して後面全体に関して積分すれば、後面に作用する揚力 L_B は

$$
L_B = AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.
$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}-(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\Bigg]\cos\alpha$$

$$-AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}-S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha \qquad (5.5)$$

- 平板に作用する揚力 L

平板に作用する揚力 L は

$$\begin{aligned}
L &= L_F+L_B\\
&= AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.\\
&\quad\left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha\\
&\quad-AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha\\
&\quad+AnmRT\left[\left(\frac{S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\sin\alpha)^2}\right.\\
&\quad\left.+\left\{-\frac{1}{2}-(S\sin\alpha)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\right\}\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\cos\alpha\\
&\quad-AnmRT\left[\frac{S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}-S^2\cos\alpha\sin\alpha\{1-\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\}\right]\sin\alpha\\
&= AnmRT\left[\frac{2S\sin\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha+(1+2S^2\sin^2\alpha)\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\right]\cos\alpha\\
&\quad-AnmRT\left[\frac{2S\cos\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\sin\alpha)^2}+2S^2\cos\alpha\sin\alpha\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\right]\sin\alpha\\
&= AnmRT\left[\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha\cos\alpha+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\cos\alpha\right]
\end{aligned}$$

整理して

$$L=AnmRT\left[\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\sin\alpha+\mathrm{erf}(S\sin\alpha)\right]\cos\alpha \qquad (5.6)$$

6. 気体から平板への伝熱量

流速 $U(\mathrm{m/s})$, 温度 $T(\mathrm{K})$, 分子数密度 $n(\mathrm{m}^{-3})$ の一様流中に、迎角 α で置かれた面積 $A(\mathrm{m}^2)$, 表面温度 $T_W(\mathrm{K})$ の平板 (形は任意) に気体から単位時間に伝達する熱量 $Q(\mathrm{J/s})$ を求める。

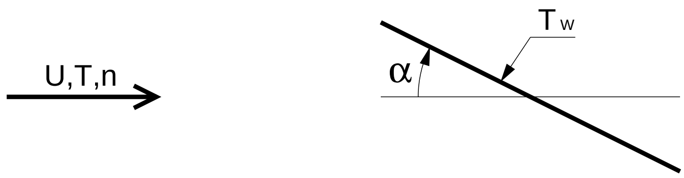

図 6.1 一様子流中に置かれた平板への伝熱量

• 平板前面への伝熱量 Q_F

前面上の微小面素 dA に図 4.1 と同様の座標系を設定する。

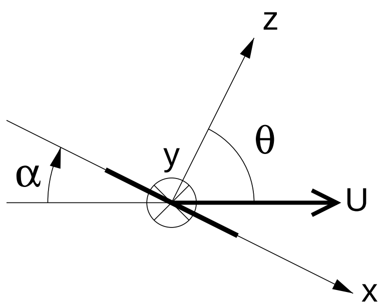

図 6.2 前面上の微小面素 dA に設定した座標系

この面素 dA に気体から単位時間に伝達する熱量 dQ_F は、式 (4.25) に求められており、Q_F はこれを前面全体に関して積分して

$$Q_F = AnmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\cos^2\theta}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right\} -\frac{1}{2}e^{-S^2\cos^2\theta}\right]$$

これを $\theta=(\pi/2)-\alpha$ に注意して書き直せば

$$Q_F = AnmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\sin^2\alpha}+\sqrt{\pi}S\sin\alpha\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\sin\alpha\right)\right\}\right\} -\frac{1}{2}e^{-S^2\sin^2\alpha}\right] \qquad (6.1)$$

• 平板後面への伝熱量 Q_B

後面上の微小面素 dA に図 4.1 と同様の座標系を設定する。

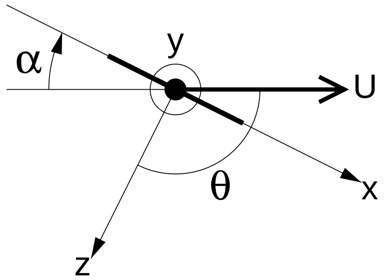

図 6.3 後面上の微小面素 dA に設定した座標系

この面素 dA に気体から単位時間に伝達する熱量 dQ_B は、式 (4.25) に求められており、Q_B はこのこれを後面全体に関して積分して

$$Q_B = AnmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\cos^2\theta}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}e^{-S^2\cos^2\theta}\right]$$

これを $\theta=(\pi/2)+\alpha$ に注意して書き直せば

$$Q_B = AnmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\sin^2\alpha}-\sqrt{\pi}S\sin\alpha\left\{1-\mathrm{erf}\left(S\sin\alpha\right)\right\}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}e^{-S^2\sin^2\alpha}\right] \tag{6.2}$$

● 平板への伝熱量 Q

平板への伝熱量 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= Q_F+Q_B \\ &= AnmRT\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}\left[2\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{e^{-S^2\sin^2\alpha}+\sqrt{\pi}S\sin\alpha\ \mathrm{erf}\left(S\sin\alpha\right)\right\}\right. \\ &\qquad \left.-e^{-S^2\sin^2\alpha}\right] \end{aligned} \tag{6.3}$$

7. 円柱の抗力

流速 U(m/s), 温度 T(K), 分子数密度 n(m^{-3}) の一様流中に、直径 D(m), 表面温度 T_W(K) の無限円柱が中心軸を一様流方向と垂直にして置かれている。この無限円柱の軸方向単位長さ部分に作用する抗力 F_D(N/m) を求める。

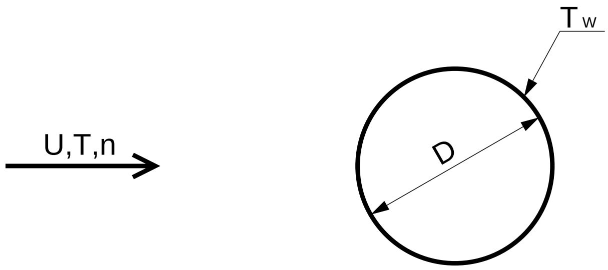

図 7.1 一様流中に置かれた円柱の抗力

円柱の中心を原点、円柱の中心軸を z 軸、方位角 $\theta = 0$ の向きが一様流に向かうような円柱座標系を設定する。

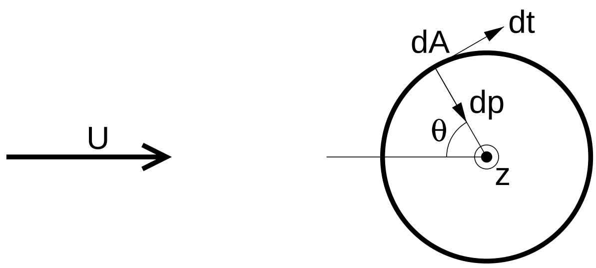

図 7.2 円柱面上の微小面素に作用する力

方位角 θ の位置にある微小面素 dA に作用する円柱中心軸向きの力を dp、接線方向 θ が増加する向きの力を dt すれば、微小面素 dA に作用する抗力 (一様流方向の力)dF_D は

$$dF_D = dp\cos\theta + dt\sin\theta = \left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)dA \tag{7.1}$$

円柱軸方向 (z 方向) 単位長さに作用する抗力 F_D は、式 (7.1) を $dA = (D/2)d\theta dz$ であることと被積分関数の $\theta = \pi$ に関する対称性を考慮して積分して

$$F_D = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi}\left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)\frac{D}{2}d\theta = D\int_0^{\pi}\left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)d\theta \tag{7.2}$$

ここで

$$I_p = \int_0^{\pi}\frac{dp}{dA}\cos\theta d\theta \quad , \quad I_t = \int_0^{\pi}\frac{dt}{dA}\sin\theta d\theta \tag{7.3}$$

と置けば

$$F_D = D(I_p + I_t) \tag{7.4}$$

● 積分 I_p の計算

図 7.2 の微小面素 dA に作用する力 dp の定義は式 (3.12) の dp と同一なので、I_p は

$$\begin{aligned}
I_p &= nmRT\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right)e^{-(S\cos\theta)^2}\right.\\
&\quad\left.+\left\{\frac{1}{2}+(S\cos\theta)^2+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\cos\theta\right\}\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]\cos\theta d\theta\\
&= nmRT\left[\frac{S}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\underline{\int_0^{\pi}\cos\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta}\right.\\
&\quad+\frac{1}{2}\underline{\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta}+S^2\underline{\int_0^{\pi}\cos^3\theta d\theta}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\\
&\quad\left.+S^2\int_0^{\pi}\cos^3\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\underline{\int_0^{\pi}\cos^2\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta}\right]
\end{aligned}$$

[ ] 内下線の積分は $\theta=\pi/2$ 関して奇であることからゼロになり、残りの積分は $\theta=\pi/2$ 関して偶であることから積分範囲を $[0,\pi/2]$ としたものの 2 倍になる。従って

$$\begin{aligned}
I_p &= nmRT\left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta\right.\\
&\quad\left.+\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta+2S^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\right]
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta \quad , \quad J_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\\
J_3 &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta \quad , \quad J_4=\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta
\end{aligned}$$

と置けば

$$I_p = nmRT\left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}}J_1+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\frac{\pi}{4}+J_3+2S^2J_4\right]$$

積分 J_1, J_3, J_4 は、それぞれ積分公式 C.6,D.1,D.2 の積分であるから、これらを代入して

$$
\begin{aligned}
I_p &= nmRT\left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)-I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}+\frac{\pi^{3/2}}{4}S\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right. \\
&\quad +\frac{\sqrt{\pi}S}{2}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} \\
&\quad \left.+2S^2\frac{\sqrt{\pi}}{3}Se^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right] \\
&= nmRT\sqrt{\pi}e^{-S^2/2}\left[\left(\frac{S}{2}+\frac{S}{2}+\frac{2}{3}S^3\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(-\frac{S}{2}+\frac{S}{2}+\frac{2}{3}S^3+\frac{S}{3}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \\
&\quad +nmRT\frac{\pi^{3/2}}{4}S\sqrt{\frac{T_W}{T}} \\
&= nmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(1+\frac{2}{3}S^2\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\frac{1}{3}(1+2S^2)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \\
&\quad +nmRT\frac{\pi^{3/2}}{4}S\sqrt{\frac{T_W}{T}} \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

- 積分 I_t の計算

図 7.2 の dt の定義は式 (3.20) の dt と同一なので、I_t は

$$
\begin{aligned}
I_t &= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\sin\theta\left[e^{-(S\cos\theta)^2}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\left\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\right\}\right]\sin\theta d\theta \\
&= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\pi}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+\sqrt{\pi}S\underline{\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta d\theta}\right. \\
&\quad \left.+\sqrt{\pi}S\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\right]
\end{aligned}
$$

[ ] 内下線の積分は $\theta=\pi/2$ 関して奇であることからゼロになり、残りの積分は $\theta=\pi/2$ 関して偶であることから積分範囲を $[0,\pi/2]$ としたものの 2 倍になる。従って

$$
I_t=\frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\left[2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+2\sqrt{\pi}S\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\right]
$$

ここで

$$
J_5=\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta \quad , \quad J_6=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta
$$

と置けば

$$
I_t=\frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}2[J_5+\sqrt{\pi}SJ_6]
$$

積分 J_5, J_6 は、それぞれ積分公式 C.3,D.3 の積分であるから、これらを代入して

$$\begin{aligned}
I_t &= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}} 2\left[\frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right. \\
&\quad \left. +\sqrt{\pi}S\frac{\sqrt{\pi}}{6}Se^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right] \\
&= nmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\frac{1}{2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}+\frac{S^2}{3}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right] \\
&= nmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{S^2}{3}\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(S^2-1)\right\}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \\
&= nmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{S^2}{3}\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{S^2}{3}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

• 式 (7.5),(7.6) を式 (7.4) に代入して

$$\begin{aligned}
F_D &= DnmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(1+\frac{2}{3}S^2\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\frac{1}{3}(1+2S^2)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \\
&\quad +DnmRT\frac{\pi^{3/2}}{4}S\sqrt{\frac{T_W}{T}} \\
&\quad +DnmRT\sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{S^2}{3}\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{S^2}{3}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

整理して

$$F_D = DnmRT\sqrt{\pi}S\left[e^{-S^2/2}\left\{\left(\frac{3}{2}+S^2\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+S^2\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}+\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{T_W}{T}}\right] \qquad (7.7)$$

8. 気体から円柱への伝熱量

流速 $U(\mathrm{m/s})$, 温度 $T(\mathrm{K})$, 分子数密度 $n(\mathrm{m}^{-3})$ の一様流中に、直径 $D(\mathrm{m})$, 表面温度 $T_W(\mathrm{K})$ の無限円柱が中心軸を一様流方向と垂直にして置かれている。この無限円柱の軸方向単位長さ部分の表面に、気体から単位時間に伝達する熱量 $Q(\mathrm{J/ms})$ を求める。

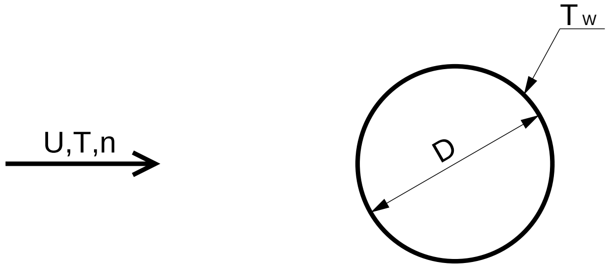

図 8.1 一様流中に置かれた円柱への伝熱量

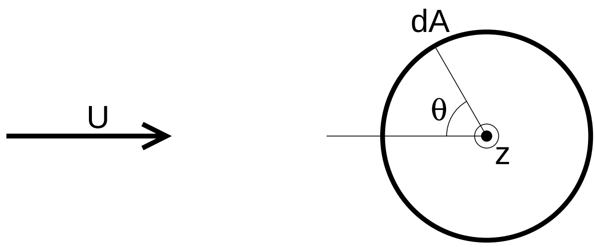

図 8.2 円柱面上の微小面素への伝熱量

円柱面上の方位角 θ の位置にある微小面素 dA への伝熱量を dQ とすれば、円柱軸方向単位長さの円柱面 A への伝熱量 Q は

$$Q = \int_A dQ = \int_A \frac{dQ}{dA} dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{dQ}{dA} \frac{D}{2} d\theta dz = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dQ}{dA} d\theta \tag{8.1}$$

式 (4.25) に求められている dQ を代入すれば

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{D}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ e^{-S^2 \cos^2\theta} + \sqrt{\pi} S \cos\theta \left\{ 1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta \right) \right\} \right\} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2} e^{-S^2 \cos^2\theta} \right] d\theta \\
&= \frac{nmRT}{2} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} D \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta + \sqrt{\pi} S \underline{\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta} \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \sqrt{\pi} S \int_0^{2\pi} \cos\theta \mathrm{erf}\left(S\cos\theta \right) d\theta \right\} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta \right]
\end{aligned}$$

となる。下線の積分はゼロになり、残りの積分は周期性と対称性から積分範囲を $[0, \pi/2]$ としたものの 4 倍になる。従って

$$\begin{aligned} Q &= \frac{nmRT}{2}\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}D\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{4\int_0^{\pi/2} e^{-S^2\cos^2\theta}d\theta\right.\right. \\ &\left.\left. +4\sqrt{\pi}S\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)d\theta\right\} - 2\int_0^{\pi/2} e^{-S^2\cos^2\theta}d\theta\right] \end{aligned}$$

ここで

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta \quad , \quad J_2 = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta$$

と置けば

$$Q = \frac{nmRT}{2}\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}D\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)4\left(J_1+\sqrt{\pi}SJ_2\right)-2J_1\right]$$

積分 J_1, J_2 は、それぞれ積分公式 C.1,D.1 の積分であるから、これらを代入して

$$\begin{aligned} Q &= \frac{nmRT}{2}\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}D\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)4\left[\frac{\pi}{2}e^{-S^2/2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)\right.\right. \\ &\left.\left. +\sqrt{\pi}S\left\{\frac{\sqrt{\pi}S}{2}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right\}\right]-2\frac{\pi}{2}e^{-S^2/2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \\ &= \frac{nmRT}{2}\sqrt{\frac{RT}{2\pi}}D2\pi e^{-S^2/2}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)2\left[\frac{1}{2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)\right.\right. \\ &\left.\left. +S\left\{\frac{S}{2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right\}\right]-\frac{1}{2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

整理して

$$\begin{aligned} Q &= \frac{nmRT}{2}\sqrt{2\pi RT}De^{-S^2/2}\left[\left(S^2+\frac{5}{2}-2\frac{T_W}{T}\right)\left\{(1+S^2)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+S^2I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right. \\ &\left. -\frac{1}{2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.2}$$

9. 球の抗力

流速 U(m/s), 温度 T(K), 分子数密度 n(m^{-3}) の一様流中に置かれた直径 D(m), 表面温度 T_W(K) の球に作用する抗力 F_D(N) を求める。

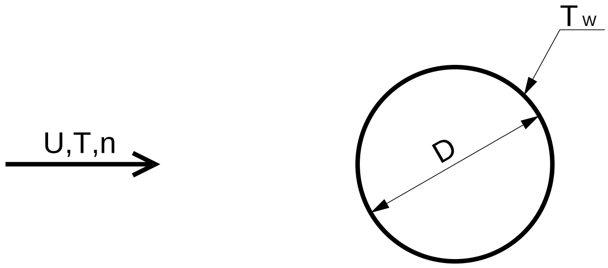

図 9.1 一様流中に置かれた球の抗力

球の中心を原点、一様流の方向を極軸の方向とする球座標系を設定する (天頂角 $\theta = 0$ の向きが一様流に向かうようにする)。対称性から方位角 $\phi = 0$ の面は任意に設定する。

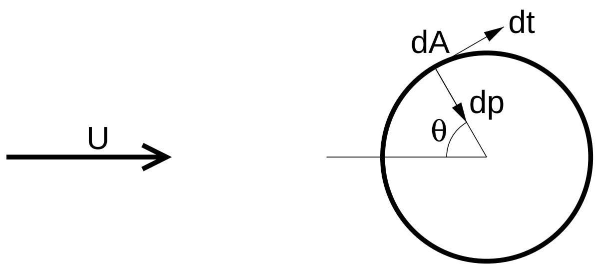

図 9.2 球面上の微小面素に作用する力

球面上 (θ, ϕ) の位置にある微小面素 dA に作用する法線方向球中心向きの力を dp、$\phi = const.$ 面内接線方向天頂角 θ が増加する向きの力を dt とすれば、微小面素 dA に作用する抗力 (一様流方向の力)dF_D は

$$dF_D = dp\cos\theta + dt\sin\theta = \left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)dA \tag{9.1}$$

となる。球に作用する抗力 F_D は、式 (9.1) を $dA = (D/2)^2\sin\theta d\theta d\phi$ に注意して積分して

$$\begin{aligned} F_D &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)\left(\frac{D}{2}\right)^2\sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\pi D^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{dp}{dA}\cos\theta + \frac{dt}{dA}\sin\theta\right)\sin\theta d\theta \end{aligned} \tag{9.2}$$

ここで

$$I_p = \int_0^\pi \frac{dp}{dA} \cos\theta \sin\theta d\theta \quad , \quad I_t = \int_0^\pi \frac{dt}{dA} \sin^2\theta d\theta \tag{9.3}$$

と置けば

$$F_D = \frac{\pi D^2}{2}(I_p + I_t) \tag{9.4}$$

●I_p の計算

図 9.2 の微小面素 dA に作用する力 dp の定義は式 (3.12) の dp と同一なので、I_p は

$$\begin{aligned}
I_p &= nmRT \int_0^\pi \left[\left(\frac{S\cos\theta}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}} \right) e^{-(S\cos\theta)^2} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2} + (S\cos\theta)^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}} S\cos\theta \right\} \{1 + \mathrm{erf}(S\cos\theta)\} \right] \cos\theta\sin\theta d\theta \\
&= nmRT \left[\frac{S}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}} \underline{\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\underline{\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta d\theta} + S^2 \underline{\int_0^\pi \cos^3\theta\sin\theta d\theta} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}} S \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta + S^2 \int_0^\pi \cos^3\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{T_W}{T}} S \underline{\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta} \right]
\end{aligned}$$

[ ] 内下線の積分は $\theta = \pi/2$ 関して奇であることからゼロになり、残りの積分は $\theta = \pi/2$ 関して偶であることから積分範囲を $[0, \pi/2]$ としたものの 2 倍になる。従って

$$\begin{aligned}
I_p &= nmRT \left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta + \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}} S \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta d\theta \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta + 2S^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta \right]
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \quad , \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{2}{3} \\
J_3 &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta \quad , \quad J_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta) d\theta
\end{aligned}$$

と置けば

$$I_p = nmRT \left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}} J_1 + \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}} S J_2 + J_3 + 2S^2 J_4 \right] \tag{9.5}$$

積分 J_1, J_3, J_4 は、それぞれ積分公式 C.7,D.4,D.5 の積分であるから、これらを代入して

$$
\begin{aligned}
& I_p \\
= & \; nmRT\left[\frac{2S}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4S^3}\mathrm{erf}(S)-\frac{e^{-S^2}}{2S^2}\right\}+\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\frac{1}{3}+\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}e^{-S^2}\right\}\right. \\
& \left.+2S^2\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1+\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}\right\}\right] \\
= & \; nmRT\left[\left(\frac{1}{2S^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4S^2}+\frac{S^2}{2}-\frac{3}{8S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{\sqrt{\pi}}{3}\sqrt{\frac{T_W}{T}}S\right. \\
& \left.+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}\left(-2+1+S^2+\frac{3}{2}\right)e^{-s^2}\right] \\
= & \; nmRT\left[\left\{\frac{1}{2}+\frac{S^2}{2}+\left(\frac{4}{8}-\frac{2}{8}-\frac{3}{8}\right)\frac{1}{S^2}\right\}\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}\left(\frac{1}{2}+S^2\right)e^{-S^2}\right] \\
& +\frac{\sqrt{\pi}}{3}nmRT\sqrt{\frac{T_W}{T}}S
\end{aligned}
$$

$$
= nmRT\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{S^2}{2}-\frac{1}{8S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}\left(\frac{1}{2}+S^2\right)e^{-S^2}\right]+\frac{\sqrt{\pi}}{3}nmRT\sqrt{\frac{T_W}{T}}S \quad (9.6)
$$

•I_t の計算

図 9.2 の dt の定義は式 (3.20) の dt と同一なので、I_t は

$$
\begin{aligned}
I_t &= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\sin\theta\left[e^{-(S\cos\theta)^2}+\sqrt{\pi}S\cos\theta\{1+\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}\right]\sin^2\theta d\theta \\
&= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\pi}\sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+\sqrt{\pi}S\underline{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta d\theta}\right. \\
&\quad \left.+\sqrt{\pi}S\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\right]
\end{aligned}
$$

[ ] 内下線の積分は $\theta=\pi/2$ 関して奇であることからゼロになり、残りの積分は $\theta=\pi/2$ 関して偶であることから積分範囲を $[0,\pi/2]$ としたものの 2 倍になる。従って

$$
I_t = \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}}\left[2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta+2\sqrt{\pi}S\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta\right]
$$

ここで、

$$
J_5=\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta \quad , \quad J_6=\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta
$$

と置けば

$$I_t = \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}} \left(2J_5 + 2\sqrt{\pi} S J_6 \right) \tag{9.7}$$

積分 J_5, J_6 は、それぞれ積分公式 C.4,D.6 の積分であるから、これらを代入して

$$I_t = \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}} \left[2 \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2S} \left(1 - \frac{1}{2S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2S^2} e^{-S^2} \right\} + 2\sqrt{\pi} S \left\{ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{S^2} + \frac{3}{4S^4} \right) \mathrm{erf}(S) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{4\sqrt{\pi} S} \left(1 - \frac{3}{2S^2} \right) e^{-S^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{2S^3} + \frac{S}{2} - \frac{1}{2S} + \frac{3}{8S^3} \right) \mathrm{erf}(S) + \left(\frac{1}{S^2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4S^2} \right) e^{-S^2} \right]$$

$$= \frac{nmRTS}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{S}{2} + \frac{1}{2S} - \frac{1}{8S^3} \right) \mathrm{erf}(S) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4S^2} \right) e^{-S^2} \right]$$

$$= nmRT \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{S^2}{2} - \frac{1}{8S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2\sqrt{\pi} S} \left(\frac{1}{2} + S^2 \right) e^{-S^2} \right] \tag{9.8}$$

• 式 (9.6),(9.8) を式 (9.4) に代入して球の抗力 F_D は

$$\begin{aligned}
F_D &= \frac{\pi D^2}{2} (I_p + I_t) \\
&= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{S^2}{2} - \frac{1}{8S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2\sqrt{\pi} S} \left(\frac{1}{2} + S^2 \right) e^{-S^2} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{3} nmRT \sqrt{\frac{T_W}{T}} S \\
&\quad + \frac{\pi D^2}{2} nmRT \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{S^2}{2} - \frac{1}{8S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2\sqrt{\pi} S} \left(\frac{1}{2} + S^2 \right) e^{-S^2} \right] \\
&= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \left[\left(1 + S^2 - \frac{1}{4S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{\sqrt{\pi} S} \left(\frac{1}{2} + S^2 \right) e^{-S^2} \right] \\
&\quad + \frac{\pi D^2}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{3} nmRT \sqrt{\frac{T_W}{T}} S
\end{aligned}$$

整理して

$$F_D = \frac{\pi D^2}{4} nmRT \left[\frac{4S^4 + 4S^2 - 1}{2S^2} \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{\sqrt{\pi} S} \left(1 + 2S^2 \right) e^{-S^2} + \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \sqrt{\frac{T_W}{T}} S \right] \tag{9.9}$$

10. 気体から球への伝熱量

流速 U(m/s), 温度 T(K), 分子数密度 n(m^{-3}) の一様流中に置かれた直径 D(m), 表面温度 T_W(K) の球に気体から単位時間に伝達する熱量 Q(J/s) を求める。

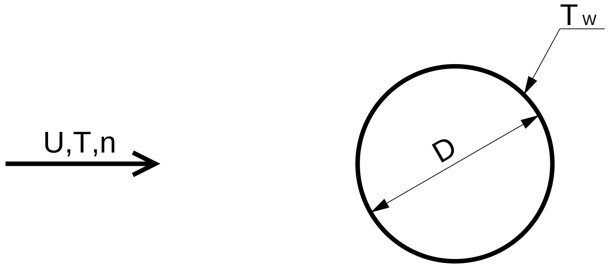

図 10.1 一様流中に置かれた球への伝熱量

球の中心を原点、一様流の方向を極軸の方向とする球座標系を設定する (天頂角 $\theta = 0$ の向きが一様流に向かうようにする)。対称性から方位角 $\phi = 0$ の面は任意に設定する。

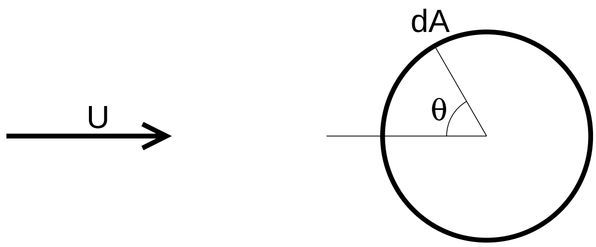

図 10.2 球面上の微小面素への伝熱量

球面上 (θ, ϕ) の位置にある微小面素 dA への伝熱量を dQ とすれば、球面全体 A への伝熱量 Q は

$$Q = \int_A dQ = \int_A \frac{dQ}{dA} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{dQ}{dA} \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\pi D^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{dQ}{dA} \sin\theta d\theta \qquad (10.1)$$

式 (4.25) に求められている dQ を代入すれば

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \int_0^{\pi} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T}\right) \left\{ e^{-S^2 \cos^2\theta} + \sqrt{\pi} S \cos\theta \left\{1 + \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right)\right\} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e^{-S^2\cos^2\theta} \right] \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T}\right) \left\{ \int_0^{\pi} \sin\theta e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta + \sqrt{\pi} S \underline{\int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\pi} S \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta \mathrm{erf}\left(S\cos\theta\right) d\theta \right\} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\theta e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

[ ] 内下線の積分は $\theta = \pi/2$ 関して奇であることからゼロになり、残りの積分は $\theta = \pi/2$ 関して偶であることから積分範囲を $[0, \pi/2]$ としたものの 2 倍になる。従って

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + 2\sqrt{\pi} S \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{erf}\left(S\cos\theta \right) d\theta \right\} - \int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta \right] \end{aligned}$$

ここで

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-S^2\cos^2\theta} d\theta \quad , \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{erf}\left(S\cos\theta \right) d\theta$$

と置けば

$$Q = \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ 2J_1 + 2\sqrt{\pi} S J_2 \right\} - J_1 \right]$$

積分 J_1, J_2 はそれぞれ積分公式 C.2,D.4 の積分であるからこれらを代入して

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left(2\left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2S} \mathrm{erf}(S) \right\} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + 2\sqrt{\pi} S \left\{ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2S^2} \right) \mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2\sqrt{\pi} S} e^{-S^2} \right\} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2S} \mathrm{erf}(S) \right] \\ &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{S} + S - \frac{1}{2S} \right) \mathrm{erf}(S) + e^{-S^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mathrm{erf}(S)}{S} \right] \end{aligned}$$

整理して

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\pi D^2}{2} nmRT \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \left[\left(S^2 + \frac{5}{2} - 2\frac{T_W}{T} \right) \left\{ \sqrt{\pi} \left(S^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{\mathrm{erf}(S)}{S} + e^{-S^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mathrm{erf}(S)}{S} \right] \end{aligned} \tag{10.2}$$

積分公式 A

A.1

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \qquad (a>0) \qquad (n=0,1,2\cdots)$$

(導出)

積分変数を $ax^2=t, x=(t/a)^{1/2}$ と変換する。この変換により積分の上下限は不変、また $2axdx=dt, xdx=dt/(2a)$ となり、積分は

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}dx = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax^2}xdx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-t}\frac{dt}{2a} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty t^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

A.2

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty x^n e^{-ax^2}dx &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (a>0) \quad (n=0,2,4\cdots) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (a>0) \quad (n=1,3,5\cdots) \end{aligned}$$

(導出)

n が奇数のときは被積分関数が奇関数となり積分はゼロ。n が偶数のときは被積分関数が偶関数となり、積分は積分公式 A.1 の 2 倍となる。

A.3

$$\int_0^b e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) \qquad (a>0)$$

(導出)

積分変数を $ax^2=t^2, x=t/\sqrt{a}$ と変換する。この変換により積分の下限 $x=0$ と上限 $x=b$ はそれぞれ $t=0, t=b\sqrt{a}$ となり、また $dx=dt/\sqrt{a}$ となるから、積分は

$$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{b\sqrt{a}} e^{-t^2}dt$$

となる。この積分は誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

により

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right)$$

と表される。

A.4

$$\int_0^b x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\left(1 - e^{-ab^2}\right) \qquad (a > 0)$$

(導出)

積分変数を $ax^2 = t$ と変換する。この変換により積分の下限 $x = 0$ と上限 $x = b$ はそれぞれ $t = 0, t = ab^2$ に変換され、また $xdx = dt/2a$ となるから、積分は

$$I = \frac{1}{2a}\int_0^{ab^2} e^{-t} dt = \frac{1}{2a}\left[-e^{-t}\right]_0^{ab^2} = \frac{1}{2a}\left[1 - e^{-ab^2}\right]$$

A.5

$$\int_0^b x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) - \frac{b}{2a} e^{-ab^2} \qquad (a > 0)$$

(導出)

積分公式 A.3 の積分をパラメータ a について微分した関係式

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_0^b e^{-ax^2} dx = -\int_0^b x^2 e^{-ax^2} dx$$

から、積分は

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^b x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{\partial}{\partial a}\int_0^b e^{-ax^2} dx = -\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right)\right] \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right)\right] \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[-\frac{1}{2}a^{-3/2} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial a}\left\{\mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right)\right\}\right] \\
&= -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[-\frac{1}{2a^{3/2}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-ab^2}\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) - \frac{b}{2a} e^{-ab^2}
\end{aligned}$$

A.6

$$\int_0^b x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2}\left\{1 - (1 + ab^2) e^{-ab^2}\right\} \qquad (a > 0)$$

(導出)

積分変数を $ax^2 = t$ と変換する。この変換により積分の下限 $x = 0$ と上限 $x = b$ はそれぞれ $t = 0, t = ab^2$ に変換され、また $xdx = dt/2a$ となるから、積分は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a^2}\int_0^{ab^2} te^{-t}dt = \frac{1}{2a^2}\left\{\left[-te^{-t}\right]_0^{ab^2} + \int_0^{ab^2} e^{-t}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2a^2}\left\{-ab^2e^{-ab^2} + \left[-e^{-t}\right]_0^{ab^2}\right\} = \frac{1}{2a^2}\left\{-ab^2e^{-ab^2} - e^{-ab^2} + 1\right\} \\ &= \frac{1}{2a^2}\left\{1-(1+ab^2)e^{-ab^2}\right\} \end{aligned}$$

A.7

$$\int_0^\infty x\exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\}dx = \frac{a}{2}\left[e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]$$

(導出)

積分変数を $(x-b)/\sqrt{a} = t, x = \sqrt{a}t + b$ と変換する。この変換により積分の下限 $x = 0$ と上限 $x = \infty$ は、それぞれ $t = -b/\sqrt{a}, t = \infty$ に変換され、また $dx = \sqrt{a}dt$ となるから積分は

$$I = \int_{-b/\sqrt{a}}^\infty \left(\sqrt{a}t+b\right)e^{-t^2}\sqrt{a}dt = \sqrt{a}\left[\sqrt{a}\int_{-b/\sqrt{a}}^\infty te^{-t^2}dt + b\int_{-b/\sqrt{a}}^\infty e^{-t^2}dt\right]$$

[ ] 内第一の積分の被積分関数が奇関数であり、第二の積分の被積分関数が偶関数であることに注意すれば、

$$I = \sqrt{a}\left[\sqrt{a}\int_{b/\sqrt{a}}^\infty te^{-t^2}dt + b\int_0^\infty e^{-t^2}dt + b\int_0^{b/\sqrt{a}} e^{-t^2}dt\right]$$

[ ] 内第一の積分の変数を $s = t^2$ と変換すれば、積分の下限 $t = b/\sqrt{a}$ と上限 $t = \infty$ はそれぞれ $s = b^2/a, s = \infty$ に変換され、また $tdt = ds/2$ となるから、[ ] 内第一の積分は

$$\int_{b/\sqrt{a}}^\infty te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\int_{b^2/a}^\infty e^{-s}ds = \frac{1}{2}\left[-e^{-s}\right]_{b^2/a}^\infty = \frac{1}{2}e^{-b^2/a}$$

[ ] 内第二の積分は、積分公式 A.1 より、

$$\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[ ] 内第三の積分は誤差関数

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

により

$$\int_0^{b/\sqrt{a}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)$$

以上より I は

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{a}\left[\frac{\sqrt{a}}{2} e^{-b^2/a} + b\frac{\sqrt{\pi}}{2} + b\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right] = \frac{\sqrt{a}}{2}\left[\sqrt{a}e^{-b^2/a} + b\sqrt{\pi}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right] \\ &= \frac{a}{2}\left[e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

A.8

$$\int_0^\infty x^2 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\} dx = \frac{a^{3/2}}{2}\left[\frac{b}{\sqrt{a}} e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]$$

(導出)

積分変数を $(x-b)/\sqrt{a} = t, x = \sqrt{a}t + b$ と変換する。この変換により積分の下限 $x = 0$ と上限 $x = \infty$ は、それぞれ $t = -b/\sqrt{a}, t = \infty$ に変換され、また $dx = \sqrt{a}dt$ となるから積分は

$$I = \int_{-b/\sqrt{a}}^\infty (\sqrt{a}t+b)^2 e^{-t^2}\sqrt{a}dt = \sqrt{a}\left[a\int_{-b/\sqrt{a}}^\infty t^2 e^{-t^2} dt + 2\sqrt{a}b\int_{-b/\sqrt{a}}^\infty t e^{-t^2} dt + b^2 \int_{-b/\sqrt{a}}^\infty e^{-t^2} dt\right]$$

となる。

[ ] 内第一、第三の積分の被積分関数が偶関数であり、第二の積分の被積分関数が奇関数であることに注意すれば、

$$I = \sqrt{a}\left[a\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt + a\int_0^{b/\sqrt{a}} t^2 e^{-t^2} dt + 2\sqrt{a}b\int_{b/\sqrt{a}}^\infty t e^{-t^2} dt + b^2\int_0^\infty e^{-t^2} dt + b^2 \int_0^{b/\sqrt{a}} e^{-t^2} dt\right]$$

となる。

[ ] 内第一の積分は、積分公式 A.1 より

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

[ ] 内第二の積分は、積分公式 A.5

$$\int_0^b x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \mathrm{erf}\left(b\sqrt{a}\right) - \frac{b}{2a} e^{-ab^2} \qquad (a > 0)$$

において $a \to 1$ とした後に $b \to b/\sqrt{a}$ として

$$\int_0^{b/\sqrt{a}} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{b}{2\sqrt{a}} e^{-b^2/a}$$

[ ] 内第三の積分は、積分公式 A.7 の導出過程で求められており

$$\int_{b/\sqrt{a}}^{\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}e^{-b^2/a}$$

[ ] 内第 4 の積分は、積分公式 A.1 より、

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

[ ] 内第 5 の積分は、誤差関数の定義より、

$$\int_0^{b/\sqrt{a}} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}
I &= \sqrt{a}\left[a\frac{\sqrt{\pi}}{4} + a\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{b}{2\sqrt{a}}e^{-b^2/a}\right\} + 2\sqrt{a}b\frac{1}{2}e^{-b^2/a} + b^2\frac{\sqrt{\pi}}{2} + b^2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right] \\
&= \sqrt{a}\left[\left(\sqrt{a}b - \frac{\sqrt{a}b}{2}\right)e^{-b^2/a} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(b^2 + \frac{a}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(b^2 + \frac{a}{2}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right] \\
&= \sqrt{a}\left[\frac{a}{2}\frac{b}{\sqrt{a}}e^{-b^2/a} + \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right] \\
&= \frac{a^{3/2}}{2}\left[\frac{b}{\sqrt{a}}e^{-b^2/a} + \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right]
\end{aligned}$$

A.9

$$\int_0^{\infty} x^3 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\}dx = \frac{a}{2}(a+b^2)e^{-b^2/a} + \frac{\sqrt{a}b\sqrt{\pi}(3a+2b^2)}{4}\left\{1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}$$

(導出)

積分変数を $(x-b) = t, x = t+b$ と変換する。この変換により積分の下限 $x=0$ と上限 $x=\infty$ は、それぞれ $t=-b, t=\infty$ に変換され、また $dx = dt$ となるから積分は

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-b}^{\infty}(t+b)^3 e^{-t^2/a}dt = \int_{-b}^{\infty}(t^3 + 3bt^2 + 3b^2t + b^3)e^{-t^2/a}dt \\
&= \int_{-b}^{\infty} t^3 e^{-t^2/a}dt + 3b\int_{-b}^{\infty} t^2 e^{-t^2/a}dt + 3b^2\int_{-b}^{\infty} te^{-t^2/a}dt + b^3\int_{-b}^{\infty} e^{-t^2/a}dt \\
&= I_1 + 3bI_2 + 3b^2I_3 + b^3I_4 \qquad (*)
\end{aligned}$$

式 $(*)$ 右辺第 1 項の積分 I_1

被積分関数が奇関数であることから

$$I_1 = \int_{-b}^{\infty} t^3 e^{-t^2/a} dt = \int_0^{\infty} t^3 e^{-t^2/a} dt - \int_0^{b} t^3 e^{-t^2/a} dt$$

となり、積分公式 A.1,A.6 より

$$I_1 = \frac{1}{2} a^2 \Gamma(2) - \frac{a^2}{2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{b^2}{a} \right) e^{-b^2/a} \right\} = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{b^2}{a} \right) e^{-b^2/a} = \frac{a}{2}(a + b^2) e^{-b^2/a} \qquad \text{(i)}$$

式 $(*)$ 右辺第 2 項の積分 I_2

被積分関数が偶関数であることから

$$I_2 = \int_{-b}^{\infty} t^2 e^{-t^2/a} dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/a} dt + \int_0^{b} t^2 e^{-t^2/a} dt$$

となり、積分公式 A.1,A.5 より

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} a^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{a^{3/2}\sqrt{\pi}}{4} \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \frac{ab}{2} e^{-b^2/a} \\ &= \frac{a^{3/2}\sqrt{\pi}}{4} \left\{ 1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} - \frac{ab}{2} e^{-b^2/a} \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

式 $(*)$ 右辺第 3 項の積分 I_3

被積分関数が奇関数であることから

$$I_3 = \int_{-b}^{\infty} t e^{-t^2/a} dt = \int_0^{\infty} t e^{-t^2/a} dt - \int_0^{b} t e^{-t^2/a} dt$$

となり、積分公式 A.1,A.4 より

$$I_3 = \frac{1}{2} a \Gamma(1) - \frac{a}{2} \left(1 - e^{-b^2/a} \right) = \frac{a}{2} e^{-b^2/a} \qquad \text{(iii)}$$

式 $(*)$ 右辺第 4 項の積分 I_4

被積分関数が偶関数であることから

$$I_4 = \int_{-b}^{\infty} e^{-t^2/a} dt = \int_0^{\infty} e^{-t^2/a} dt + \int_0^{b} e^{-t^2/a} dt$$

となり、積分公式 A.1,A.3 より

$$I_4 = \frac{1}{2} a^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{a^{1/2}\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a^{1/2}\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 + \mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right\} \qquad \text{(iv)}$$

(i)∼(iv) を $(*)$ に代入して

$$I = I_1 + 3bI_2 + 3b^2 I_3 + b^3 I_4$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{2}(a+b^2)e^{-b^2/a} + 3b\left[\frac{a^{3/2}\sqrt{\pi}}{4}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\} - \frac{ab}{2}e^{-b^2/a}\right] + 3b^2\left[\frac{a}{2}e^{-b^2/a}\right] \\
&\quad +b^3\left[\frac{a^{1/2}\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}\right] \\
&= \left\{\frac{a}{2}(a+b^2) - \frac{3ab^2}{2} + \frac{3ab^2}{2}\right\}e^{-b^2/a} + \left\{\frac{3a^{3/2}b\sqrt{\pi}}{4} + \frac{a^{1/2}b^3\sqrt{\pi}}{2}\right\}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\} \\
&= \frac{a}{2}(a+b^2)e^{-b^2/a} + \frac{\sqrt{a}b\sqrt{\pi}(3a+2b^2)}{4}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

A.10

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\}dx = b\sqrt{a\pi}$$

(導出)

積分変数を $x-b=t, x=t+b$ と変換する。$dx=dt$ となるから積分は、積分公式 A.2 を用いて

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}(t+b)e^{-t^2/a}dt = b\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/a}dt = b\sqrt{a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = b\sqrt{a\pi}$$

A.11

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left\{-\frac{(x-b)^2}{a}\right\}dx = \frac{a^{3/2}}{2}\sqrt{\pi} + b^2\sqrt{a}\sqrt{\pi}$$

(導出)

積分変数を $x-b=t, x=t+b$ と変換する。$dx=dt$ となるから積分は、積分公式 A.2 を用いて

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}(t+b)^2e^{-t^2/a}dt = \int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2bt+b^2)e^{-t^2/a}dt = \int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2/a}dt + b^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/a}dt \\
&= a^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + b^2a^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^{3/2}}{2}\sqrt{\pi} + b^2\sqrt{a}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

積分公式 B　erf(x) を被積分関数に含む関数の積分。

B.1

$$\int \mathrm{erf}(x)dx = x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

(導出)

部分積分する。

$$I = \int \mathrm{erf}(x)dx = x\mathrm{erf}(x) - \int x\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx = x\mathrm{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int 2xe^{-x^2}dx$$

ここで積分変数を $x^2 = t, 2xdx = dt$ と変換して、

$$I = x\mathrm{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t}dt = x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

B.2

$$\int x\mathrm{erf}(x)dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x) + \frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

(導出)

積分公式 B.1 を用いて部分積分する。

$$\begin{aligned} I &= \int x\mathrm{erf}(x)dx = x\left(x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right) - \int\left(x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right)dx \\ &= x\left(x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right) - \int x\mathrm{erf}(x)dx - \frac{1}{2}\mathrm{erf}(x) \end{aligned}$$

右辺第 2 項は求める積分 I だから

$$I = x\left(x\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right) - I - \frac{1}{2}\mathrm{erf}(x)$$

となり、これを I について解いて

$$I = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x) + \frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

B.3

$$\int x^2\mathrm{erf}(x)dx = \frac{1}{3}\left\{x^3\mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x^2+1)e^{-x^2}\right\}$$

(導出)

積分公式 B.2 を用いて部分積分する。

$$I = \int x^2\mathrm{erf}(x)dx = \int x\cdot\{x\mathrm{erf}(x)\}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\int\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}dx \\
&= x\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{erf}(x)dx+\frac{1}{4}\int\mathrm{erf}(x)dx-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int xe^{-x^2}dx
\end{aligned}
$$

右辺第 2 項は求める積分 I だから、上式を I について解いて

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}I &= \frac{x}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}+\frac{1}{4}\left\{x\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}e^{-x^2} \\
&= \frac{x}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-x^2} \\
&= \frac{x^3}{2}\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(x^2+1)e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

より

$$
I=\frac{1}{3}\left\{x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}(x^2+1)e^{-x^2}\right\}
$$

B.4

$$
\int x^3\mathrm{erf}(x)dx=\frac{1}{4}\left(x^4-\frac{3}{4}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(x^2+\frac{3}{2}\right)xe^{-x^2}
$$

(導出)

積分公式 B.3 を用いて部分積分する。

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^3\mathrm{erf}(x)dx=\int x\cdot x^2\mathrm{erf}(x)dx \\
&= x\left\{\frac{1}{3}x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2+1}{3\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\int\left\{\frac{1}{3}x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2+1}{3\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}dx \\
&= x\left\{\frac{1}{3}x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2+1}{3\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\frac{1}{3}\int x^3\mathrm{erf}(x)dx-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\int x^2e^{-x^2}dx-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx
\end{aligned}
$$

右辺第 2 項は求める積分 I だから、上式を I について解いて

$$
\frac{4}{3}I=x\left\{\frac{1}{3}x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2+1}{3\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\int x^2e^{-x^2}dx-\frac{1}{6}\mathrm{erf}(x)
$$

ここで、右辺第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\int x^2e^{-x^2}dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int x^2\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[x^2\mathrm{erf}(x)-\int 2x\mathrm{erf}(x)dx\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}x^2\mathrm{erf}(x)-\sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(x^2-x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x)-\frac{x}{2}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(x)-\frac{x}{2}e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

であるから、これを代入して

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}I &= x\left\{\frac{1}{3}x^3\mathrm{erf}(x)+\frac{x^2+1}{3\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right\}-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(x)-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right\}-\frac{1}{6}\mathrm{erf}(x) \\
&= \left(\frac{x^4}{3}-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(x^3+x+\frac{x}{2}\right)e^{-x^2} \\
&= \left(\frac{x^4}{3}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}\left(x^3+\frac{3}{2}x\right)e^{-x^2} \\
I &= \frac{1}{4}\left(x^4-\frac{3}{4}\right)\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(x^2+\frac{3}{2}\right)xe^{-x^2}
\end{aligned}$$

積分公式 C　$\exp\{-(S\cos\theta)^2\}$ を被積分関数に含む関数の積分。

C.1

$$\int_0^{\pi/2} e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-S^2/2} I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) \quad (I_0\text{は 0 次の第 1 種変形 Bessel 関数})$$

(導出)

積分変数を $\cos 2\theta = x$ と変換する。$-2\sin 2\theta d\theta = dx$、$\sin 2\theta = \sqrt{1-x^2}$ より $d\theta = -dx/(2\sqrt{1-x^2})$ となる。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \exp\left(-S^2\cos^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \exp\left(-S^2 \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) d\theta \\ &= e^{-S^2/2} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{S^2}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = e^{-S^2/2} \int_1^{-1} \exp\left(-\frac{S^2}{2}x\right) \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} e^{-S^2/2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(0-1/2)} e^{-(S^2/2)x} dx \end{aligned}$$

右辺の積分は、変形 Bessel 関数の積分表示 [1]

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(\nu-1/2)} e^{-zx} dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(z/2)^\nu} I_\nu(z) \quad (\mathrm{Re}\ \nu > -1/2)$$

で $\nu = 0, z = S^2/2$ としたものであるから

$$I = \frac{1}{2} e^{-S^2/2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(0+\frac{1}{2})}{[(S^2/2)/2]^0} I_0(S^2/2) = \frac{\pi}{2} e^{-S^2/2} I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)$$

[1] 森口繁一、宇田川　久、一松信：数学公式 III：岩波書店 (1970),p.186.

C.2

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2S} \mathrm{erf}(S)$$

(導出)

積分変数を $x = S\cos\theta$ と変換する。$dx = -S\sin\theta d\theta$ となるから積分は、

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \int_S^0 e^{-x^2} \frac{-1}{S} dx = \frac{1}{S} \int_0^S e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2S} \mathrm{erf}(S)$$

となる。

C.3

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-S^2/2} \left\{ I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right) \right\}$$

(I_0, I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta) e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^{\pi/2} e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2}(J_1 - J_2) \end{aligned}$$

{ } 内第 1 項の積分 J_1 は積分公式 C.1 の積分であるから、{ } 内第 2 項の積分 J_2 のみを求めればよい。

積分 J_2 において積分変数を $\cos 2\theta = x$ と変換する。$-2\sin 2\theta d\theta = dx$、$\sin 2\theta = \sqrt{1-x^2}$ より $d\theta = -dx/(2\sqrt{1-x^2})$ となる。

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \exp\left\{ -\frac{S^2(1+\cos 2\theta)}{2} \right\} d\theta \\ &= e^{-S^2/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \exp\left\{ -\frac{S^2 \cos 2\theta}{2} \right\} d\theta = e^{-S^2/2} \int_1^{-1} x e^{-(S^2/2)x} \frac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= e^{-S^2/2} \int_{-1}^{1} e^{-(S^2/2)x} \frac{x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} e^{-S^2/2} \int_{-1}^{1} e^{-(S^2/2)x} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-S^2/2} \left\{ \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_{-1}^{1} - \frac{S^2}{2} \int_{-1}^{1} e^{-(S^2/2)x} \sqrt{1-x^2} dx \right\} \\ &= -\frac{S^2}{4} e^{-S^2/2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(1-1/2)} e^{-(S^2/2)x} dx \end{aligned}$$

ここで右辺の積分は C.1 の導出で使用した変形 Bessel 関数の積分表示において $\nu = 1, z = S^2/2$ としたものであるから

$$J_2 = -\frac{S^2}{4} e^{-S^2/2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\frac{1}{2})}{[(S^2/2)/2]^1} I_1(S^2/2) = -\frac{\pi}{2} e^{-S^2/2} I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)$$

となり、積分公式 C.1 と合わせて

$$I = \frac{1}{2}(J_1 - J_2) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}e^{-S^2/2}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \frac{\pi}{2}e^{-S^2/2}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

C.4

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\left(1 - \frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2S^2}e^{-S^2}$$

(導出)

積分変数を $x = S\cos\theta$ と変換する。$dx = -S\sin\theta d\theta$ となるから積分は、

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)e^{-(S\cos\theta)^2}\sin\theta d\theta$$

$$= \int_S^0 \left(1 - \frac{x^2}{S^2}\right)e^{-x^2}\frac{-1}{S}dx = \frac{1}{S^3}\int_0^S (S^2 - x^2)e^{-x^2}dx = \frac{1}{S}\int_0^S e^{-x^2} - \frac{1}{S^3}\int_0^S x^2 e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\mathrm{erf}(S) - \frac{1}{S^3}\int_0^S x^2 e^{-x^2}dx$$

となる。ここで右辺第 2 項の積分を

$$J = \int_0^S x^2 e^{-x^2}dx$$

とおけば、

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\mathrm{erf}(S) - \frac{1}{S^3}J$$

となる。

$$e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{erf}(x)$$

であることに注意して J を部分積分すれば

$$J = \left[x^2\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(x)\right]_0^S - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^S 2x\mathrm{erf}(x)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}S^2\mathrm{erf}(S) - \sqrt{\pi}\int_0^S x\mathrm{erf}(x)dx$$

となる。J の右辺第 2 項の積分は積分公式 B.2 より

$$\int_0^S x\mathrm{erf}(x)dx = \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(x) + \frac{x}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\right]_0^S = \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(S) + \frac{S}{2\sqrt{\pi}}e^{-S^2}$$

これを J の式に代入すれば

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}S^2\mathrm{erf}(S) - \sqrt{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(S) + \frac{S}{2\sqrt{\pi}}e^{-S^2}\right\}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}S^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}S^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\mathrm{erf}(S) - \frac{S}{2}e^{-S^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(S) - \frac{S}{2}e^{-S^2}$$

となり、この J を I の式に代入して

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\mathrm{erf}(S) - \frac{1}{S^3}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{4}\mathrm{erf}(S) - \frac{S}{2}e^{-S^2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\left(1-\frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2S^2}e^{-S^2}$$

を得る。

C.5

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta = \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

(I_0, I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta - \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta = J_1 - J_2 \end{aligned}$$

右辺第 1 項の積分 J_1 は積分公式 C.3 の積分であるから、右辺第 2 項の積分 J_2 のみを求めればよい。

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\exp\left\{-\frac{S^2(1+\cos 2\theta)}{2}\right\}d\theta \\ &= \frac{1}{4}e^{-S^2/2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2\theta)e^{-(S^2/2)\cos 2\theta}d\theta \end{aligned}$$

積分変数を $\cos 2\theta = x$ と変換する。$-2\sin 2\theta d\theta = dx$、$\sin 2\theta = \sqrt{1-x^2}$ より $d\theta = -dx/(2\sqrt{1-x^2})$ となる。

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{4}e^{-S^2/2}\int_1^{-1}(1-x^2)e^{-(S^2/2)x}\frac{-xdx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{8}e^{-S^2/2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(1-1/2)}e^{-(S^2/2)x}dx \end{aligned}$$

ここで右辺の積分は C.1 の導出で使用した変形 Bessel 関数の積分表示において $\nu = 1, z = S^2/2$ としたものであるから

$$J_2 = \frac{1}{8}e^{-S^2/2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\frac{1}{2})}{[(S^2/2)/2]^1}I_1(S^2/2) = \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\frac{1}{S^2}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)$$

となる。積分公式 C.3 と合わせて

$$\begin{aligned} J &= J_1 - J_2 = \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} - \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\frac{1}{S^2}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

C.6

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-S^2/2}\left\{ I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) - I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

(I_0, I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta) e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

右辺第 1,2 項の積分はそれぞれ積分公式 C.1,C.3 の積分であるからそれらを代入して

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2} e^{-S^2/2} I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) - \frac{\pi}{4} e^{-S^2/2}\left\{ I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{4} e^{-S^2/2}\left\{ I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) - I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

C.7

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{4S^3}\mathrm{erf}(S) - \frac{e^{-S^2}}{2S^2}$$

(導出)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta e^{-(S\cos\theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

右辺第 1,2 項の積分はそれぞれ積分公式 C.2,C.4 の積分であるからそれらを代入して

$$\begin{aligned} J &= \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2S}\mathrm{erf}(S)\right\} - \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2S}\left(1 - \frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S) + \frac{1}{2S^2}e^{-S^2}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2S}\left(1 - 1 + \frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S) - \frac{1}{2S^2}e^{-S^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4S^3}\mathrm{erf}(S) - \frac{e^{-S^2}}{2S^2} \end{aligned}$$

積分公式 D　$\mathrm{erf}(S\cos\theta)$ を被積分関数に含む関数の積分。

D.1

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta=\frac{\sqrt{\pi}S}{2}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

(I_0,I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta=\Big[\sin\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)\Big]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\mathrm{erf}(S\cos\theta)\}d\theta \\
&= -\int_0^{\pi/2}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{S\cos\theta}e^{-x^2}dx\right\}d\theta=-\int_0^{\pi/2}\sin\theta\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\cos\theta)^2}(-S\sin\theta)\right\}d\theta \\
&= \frac{2S}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta
\end{aligned}$$

右辺の積分は積分公式 C.3 の積分であるのでそれを代入して

$$J=\frac{2S}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}=\frac{\sqrt{\pi}S}{2}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

D.2

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta=\frac{\sqrt{\pi}}{3}Se^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

(I_0,I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$\cos^3\theta$ の不定積分

$$\int\cos^3\theta d\theta=\frac{1}{12}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

に注目して部分積分する。

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta \\
&= \left[\left\{\frac{1}{12}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta\right\}\mathrm{erf}(S\cos\theta)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{1}{12}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta\right\}\frac{d}{d\theta}\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta \\
&= -\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{1}{12}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta\right\}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(S\cos\theta)^2}(-S\sin\theta)\right\}d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{S}{6\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin 3\theta\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta + \frac{3S}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta$$

$$= \frac{S}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{6}\int_0^{\pi/2}(-4\sin^3\theta + 3\sin\theta)\sin\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta + \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta\right]$$

$$= \frac{S}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4 e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta + 2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta e^{-(S\cos\theta)^2}d\theta\right]$$

[ ] 内第 1,2 項の積分はそれぞれ積分公式 C.5,C.3 であるのでそれらを代入して

$$J = \frac{S}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{2}{3}\frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} + 2\frac{\pi}{4}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left\{-\frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{S^2}\right) + \frac{1}{2}\right\}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\frac{1}{3}I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{3}Se^{-S^2/2}\left[I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

D.3

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{6}Se^{-S^2/2}\left[I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

(I_0, I_1 はそれぞれ 0 次,1 次の第 1 種変形 Bessel 関数)

(導出)

$$J = \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\theta(1 - \cos^2\theta)\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta$$

右辺第 1,2 項の積分はそれぞれ積分公式 D.1,D.2 の積分であるのでそれらを代入して

$$J = \frac{\sqrt{\pi}S}{2}e^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\} - \frac{\sqrt{\pi}}{3}Se^{-S^2/2}\left\{I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2S^2}\right)I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{\pi}Se^{-S^2/2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)I_0\left(\frac{S^2}{2}\right) + \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2S^2}\right)\right\}I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\pi} S e^{-S^2/2}\left[\frac{1}{6} I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6S^2}\right) I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{6} S e^{-S^2/2}\left[I_0\left(\frac{S^2}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{S^2}\right) I_1\left(\frac{S^2}{2}\right)\right]$$

D.4

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}e^{-S^2}$$

(導出) 積分変数を $x = S\cos\theta$ と変換する。$dx = -S\sin\theta d\theta$ となり積分は、

$$I = \int_S^0 \frac{x}{S}\mathrm{erf}(x)\left(-\frac{dx}{S}\right) = \frac{1}{S^2}\int_0^S x\mathrm{erf}(x)dx$$

となる。積分公式 B.2 から

$$I = \frac{1}{S^2}\left\{\frac{1}{2}\left(S^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{S}{2\sqrt{\pi}}e^{-S^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}S}e^{-S^2}$$

D.5

$$\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta = \frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1+\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}$$

(導出) 積分変数を $x = S\cos\theta$ と変換する。$dx = -S\sin\theta d\theta$ となり積分は、

$$I = \int_S^0 \frac{x^3}{S^3}\mathrm{erf}(x)\frac{-dx}{S} = \frac{1}{S^4}\int_0^S x^3\mathrm{erf}(x)dx$$

となる。積分公式 B.4 から

$$I = \frac{1}{S^4}\left\{\frac{1}{4}\left(S^4-\frac{3}{4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(S^2+\frac{3}{2}\right)Se^{-S^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1+\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}$$

D.6

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{S^2}+\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1-\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}$$

三角関数の公式から

$$I = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\cos\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta - \int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta \mathrm{erf}(S\cos\theta)d\theta$$

となる。右辺第 1 項に積分公式 D.4、第 2 項に積分公式 D.5 を用いて

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2S^2}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{e^{-S^2}}{2\sqrt{\pi}S}-\left\{\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1+\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4S^2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{16S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(2-1-\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2} \\
&= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4S^2}+\frac{3}{16S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1-\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2} \\
&= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{S^2}+\frac{3}{4S^4}\right)\mathrm{erf}(S)+\frac{1}{4\sqrt{\pi}S}\left(1-\frac{3}{2S^2}\right)e^{-S^2}
\end{aligned}
$$

となる。

● 参考文献

[1]Schaaf,S.A. and Chambre,P.L. : Flow of Rarefied Gases : High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion Vol.3,Fundamentals of gas dynamics(1958),pp.687-739.

[2]Heineman,M. : Theory of Drag in Highly Rarefied Gases : Communuications on Pure & Applied Mathematics Vol1.1(1948),pp.259-273.

[3]Stalder,J.R., Goodwin,G. and Creager,M.O. : A Comparison of Theory and Experiment for High-Speed Free-Molecule Flow : NACA Report 1032(1950)

[4]Ashley,H. : Application of the Theory of Free Molecule Flow to Aeronautics : Journal of the Aeronautical Sciences Vol.16(1949),pp.95-104.